ХМЕЛЬНИЦЬКА ОБЛАСНА РАДА
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ УПРАВЛІННЯ ТА ПРАВА
ІМЕНІ ЛЕОНІДА ЮЗЬКОВА

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з навчальної роботи

________________ Л.І.Чорний
(підпис) (ініціали, прізвище)
___ ______________ 2019 року
м.п.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з навчальної дисципліни
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»
для підготовки на першому освітньому рівні
здобувачів вищої освіти ступеня бакалавра
за спеціальністю 073 Менеджмент
галузі знань 07 Управління та адміністрування

м. Хмельницький
2019

ЗМІСТ

Стор.

1. Структура вивчення навчальної дисципліни

1.1. Тематичний план навчальної дисципліни

№ теми	Назва теми	Кількість годин											
		Денна форма навчання						Заочна форма навчання					
		Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
			Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС		Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.	Елементи теорії визначників	8	2	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
2.	Основи теорії матриць	8	2	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
3.	Система лінійних алгебраїчних рівнянь	8	2	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
4.	Функціональна залежність. Основи теорії границь функції	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
5.	Неперервність функції. Визначні границі	8	2	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
6.	Похідна. Диференціал	10	2	2	–	–	6	–	–	–	–	–	–
7.	Основні теореми диференціального числення.	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
8.	Невизначений інтеграл. Комплексні числа.	8	2	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
9.	Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів	12	2	2			8						
10.	Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Кратні інтеграли	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
11.	Числові ряди. Степеневі, тригонометричні, функціональні ряди	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
12.	Комбінаторика	14	2	2	–	–	10	–	–	–	–	–	–
13.	Основи теорії ймовірності	16	4	4	–	–	8	–	–	–	–	–	–
14.	Основні поняття математичного програмування.	9	2	2	–	–	5	–	–	–	–	–	–

15.	Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП	8	2	2	–	–	4						
16.	Транспортна задача. Метод потенціалів	8	2	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
	Всього годин:	165	34	34	–	–	97	–	–	–	–	–	–

1.2. Лекції

№ з/п	Назва і план теми	Денна форма
1	2	3
1	**Елементи теорії визначників**	2
1.1. 1.2. 1.3. 1.4.	Визначники другого і третього порядків. Визначники к-го порядку. Властивості визначників. Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця. Способи обчислення визначників. Правило Крамера розв'язування систем *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими. .	
	Основи теорії матриць	2
2.1. 2.2. 2.3. 2.4. 2.5.	Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці. Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць. Додавання матриць і множення матриць на число. Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці. Матричне рівняння.	
	Системи лінійних рівнянь	2
3.1. 3.2. 3.3. 3.4.	Поняття про системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи лінійних рівнянь. Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса). Розв'язування систем рівнянь методом повного виключення невідомих (методом Жордано-Гауса).	
	Функціональна залежність. Границя функції	2
4.1. 4.2. 4.3.	Поняття функції. Способи задавання функції. Область визначення та область значень функції. Властивості функцій: обмеженість і необмеженість, зростання й спадання функції, парність і непарність, періодичність. Класифікація функцій. Елементарні функції та їх графіки. Поняття	

4.4.	оберненої функції. Числова послідовність. Означення границі послідовності. Нескінченно малі та великі величини. Означення границі функції. Односторонні границі. Властивості функцій, що мають скінченні границі.	
	Неперервність функції. Чудові границі	2
5.1. 5.2. 5.3. 5.4. 5.5.	Невизначені вирази. Границя монотонної функції. Число *e*. Натуральні логарифми. Означення неперервності функції в точці. Неперервність функції на відрізку. Арифметичні операції над неперервними функціями. Класифікація розривів. Властивості неперервних функцій. Неперервність елементарних функцій. Чудові границі границі. Необхідні границі.	
	Похідна. Диференціал	2
6.1. 6.2. 6.3. 6.4.	Застосування похідної в економічних розрахунках. Означення похідної. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної. Похідні елементарних функцій. Похідна оберненої функції. Таблиця похідних. Правила обчислення похідних. Похідна складної функції. Односторонні похідні. Похідні вищих порядків.	
	Основні теореми диференціального числення. Функції однієї змінної.	2
7.1. 7.2. 7.3. 7.4.	Визначення диференціалу. Диференціал суми, добутку і частки. Інваріантність форми першого диференціалу. Диференціали вищих порядків. Основні теореми диференціального числення. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Правило Лопіталя.	
	Невизначений інтеграл. Комплексні числа.	2
8.1. 8.2. 8.3. 8.4.	Поняття первісної функції і невизначеного інтегралу. Застосування інтегралів у задачах економіки. Геометричний і механічний зміст інтегралу. Таблиця основних інтегралів. Найпростіші правила інтегрування. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.	
	Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів	2
9.1. 9.2. 9.3. 9.4.	Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування не правильних дробів. Інтегрування ірраціональних виразів та виразів, що містять тригонометричні функції. Тригонометричні підстановки	
	Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Кратні інтеграли	2
10.1.	Інтегральні суми. Умови існування визначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу. Обчислення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбниця.	

10.2. 10.3. 10.4.	Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Наближене обчислення визначеного інтегралу: формули прямокутників, трапецій, Сімпсона. Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжин дуг кривих. Поняття невласних інтегралів.	
	Числові ряди. Степеневі, тригонометричні, функціональні ряди	2
11.1. 11.2. 11.3. 11.4.	Частинні суми ряду. Необхідна умова збіжності ряду. Ряди з додатними членами. Теорема порівняння рядів. Абсолютна й умовна збіжність рядів. Теорема Лейбниця. Ознака залишку знакоперемінного ряду.	
	Комбінаторика	2
12.1. 12.2. 12.3. 12.4.	Скінчені множини. Комбінаторний аналіз. Розміщення, перестановки, комбінації без повторень Розміщення, перестановки, комбінації з повтореннями Правило суми і добутку.	
	Основи теорії ймовірності	4
13.1. 13.2. 13.3. 13.4. 13.5	Випадкові події та дії над ними. Класичне визначення ймовірності. Повна ймовірність. Умовна ймовірність. Теорема Байєса. Формули Бернулі та Пуассона	
	Основні поняття математичного програмування	2
14.1. 14.2. 14.3.	Загальна постановка задач. Економічні приклади моделей лінійного програмування (задача оптимального використання сировини, задача оптимізації виробничої програми). Задача складання сумішей (раціону).	
	Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП	2
15.1. 15.2. 15.3. 15.4.	Задача лінійного програмування, форми її запису. Дослідження задачі лінійного програмування. Теоретичні основи симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування. Розв’язування задач лінійного програмування з допомогою MS Excel	
	Транспортна задача. Метод потенціалів	2
16.1. 16.2. 16.3.	Постановка транспортної задачі, умова існування її розв'язку. Пошук оптимального плану перевезень за методом потенціалів. Розв'язування транспортної задачі за допомогою MS Excel.	

1.3. Семінарські заняття

Семінарське заняття 1

Тема. Елементи теорії визначників

Питання для усного опитування та дискусії

1. Визначники, їх властивості.
2. Визначники другого і третього порядків. Визначники к-го порядку. Властивості визначників.
3. Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.
4. Способи обчислення визначників. Правило Крамера розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські та індивідальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання, відповідна тема.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : скаляр, вектор, скалярний добуток, визначник, порядок визначника, матриця, додавання матриць, множення матриці на число, добуток матриць, одинична матриця, невироджена матриця, мінор, алгебраїчне доповнення, обернена матриця, математична модель, модель Леонтьєва.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Визначники другого порядку.

Визначником (детермінантом) другого порядку називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Приклад: розв’язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x - 6y = 5 \\ 8x - 7y = -10 \end{cases}$$

Розв’язування.

Маємо: $D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-7) - 8 \cdot (-6) = -1 (\neq 0)$,

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-7) - (-6) \cdot (-10) = -95;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-10) - 5 \cdot 8 = -110$$

Підставимо значення визначників, одержуємо розв’язок системи :

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-95}{-1} = 95;$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-110}{-1} = 110$$

Відповідь: формули (11) дають розв’язок системи (7): $x = 95; y = 110.$

Визначники третього порядку.

Визначником (детермінантом) третього порядку називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Приклад: обчислимо визначник $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Користуючись означенням, маємо:

$$D = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0+4) - 0 + 2(-2-0) = 4 - 4 = 0.$$

Мінором елемента визначника третього порядку, який одержується з даного визначника в результаті викреслювання строчки і стовпчика, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад, мінор елемента 5 визначника $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ – це визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3$.

Говорять, що **елемент займає парне місце**, якщо сума номерів його стрічки і стовпчика – число парне, і **непарне місце**, якщо сума номерів його сторчки і стовпчика – число непарне.

Наприклад, елемент 5 в попередньому прикладі займає непарне місце, бо знаходиться в 1-ій строчці і в 2-му стовпчику, а 1+2=3 – число непарне.

Алгебраїчним доповненням (мінором із знаком) елемента визначника третього порядку називається мінор цього елемента, взятий із знаком “плюс”, якщо елемент займає парне місце, і із знаком “мінус”, якщо непарне місце.

Приклад, для визначника виду $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ алгебраїчне доповнення елемента a_1 – це число $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, алгебраїчне доповнення елемента b_3 – це число $B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (алгебраїчне доповнення елементів позначаються відповідними великими буквами з тими ж самими індексами).

Якщо елементи визначника представлені як a_{ij} (i – номер строчки, j – номер стовпчика), тобто якщо $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то, позначивши через M_{ij} мінор елемента a_{ij}, через A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, маємо:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(Тут $(-1)^{i+j}$ забезпечує зміну знаків: якщо $i+j$ – число парне, то $(-1)^{i+j}=1$, а якщо $i+j$ – число непарне, то $(-1)^{i+j}=-1$).

Стрічки і стовпчики визначника називають його **рядами**.

Має місце така теорема про обчислення визначника третього порядку.

Основні властивості визначників.

Відзначимо основні властивості визначників (спираючись на визначники 3-го порядку).

1) Визначник не змінює свого значення, якщо його строчки замінити відповідними стовпчиками (операціями називається транспонуванням визначника):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2) При перестановці двох паралельних рядів визначника його абсолютна величина зберігає попереднє значення, а знак змінюється на протилежний.

З другої властивості випливає два наслідки: а) визначник, у якого два паралельних ряди однакові, дорівнює нулю (дійсно, якщо $-D=D$, то $D=0$);

б) Сума добутків елементів якого-небудь ряду визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного ряду дорівнює нулю (так, наприклад, $a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0$, бо це – розкладений по 2-ій стрічці визначник $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, який дорівнює нулю, оскільки перший і другий рядок однакові).

3) Спільний множник k елементів якого-небудь ряду визначника можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Наслідки:

а) якщо всі елементи деякого ряду визначника дорівнюють нулю, то цей визначник дорівнює нулю;

б) якщо елементи якого-небудь ряду визначника пропорційні відповідним елементам паралельного ряду, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

4) Якщо елементи якого-небудь ряду визначника дорівнюють сумі двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох відповідних визначників:

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+\alpha_1)A_1+(b_1+\beta_1)B_1+(c_1+\gamma_1)C_1 = (a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1)+$$

$$+(\alpha_1A_1+\beta_1B_1+\gamma_1C_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -55 + 14 = -41$$

(перший рядок множимо на (-2) і додаємо до другого; перший рядок множимо на 3 і додаємо до третього). Завдяки властивостям визначників для обчислення визначника третього порядку нам довелося обчислювати не три, а лише один визначник другого порядку.

Аналогічно тому, як ми ввели означення визначника третього порядку через визначники другого порядку, можна ввести поняття про визначники четвертого порядку через визначники третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

Основи теорії визначників закладені в 1750 році швейцарським математиком Г. Крамером (1704 – 1752).

Семінарське заняття 2

Тема. Основи теорії матриць

Питання для усного опитування та дискусії

1. Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці.
2. Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць.
3. Додавання матриць і множення матриць на число. Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці. Матричне рівняння.
4. Поняття про модель Леонтьєва.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські та індивідальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання, відповідна тема.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : матриця, додавання матриць, множення матриці на число, добуток матриць, одинична матриця, невироджена матриця, мінор, алгебраїчне доповнення, обернена матриця, математична модель, модель Леонтьєва.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Визначники другого порядку.

Матриці та дії з ними

Матрицею називається прямокутна таблиця, складена з чисел або з функцій.

Приклад: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}.$

Цю таблицю записують в круглих або в квадратних дужках (на відміну від визначників). Розміри матриці записують так: $m \times n$, де m – число стрічок, n – число стовпчиків. Так, наведені вище матриці мають відповідно такі розміри: $3 \times 2; 2 \times 3; 2 \times 2$.

Якщо число стрічок матриці дорівнює числу її стовпчиків, то матриця називається квадратною (остання з наведених матриць є квадратною матрицею другого порядку).

Матриця, у якої всього один стовпчик або одна стрічка, називається вектором. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою. Квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю (крім, можливо, елементів, що стоять на головній діагоналі), називається діагональною. Квадратна матриця, у якої всі елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці, а інші – нулю, називається одиничною матрицею і позначається E (або I).

Транспонування матриці А – це заміна її стрічок відповідними стовпчиками. Транспоновану матрицю до матриці А позначають A^*. Маємо: $a_{ij}^* = a_{ji}$.

Квадратна матриця А має визначник $\det A$. При цьому $\det A^* = \det A$.Основні дії з матрицями – це додавання матиць; множення матриці на число та множення двох матриць.

1) Додаванням матриць. Матриці однакового розміру можна додавати. Для цього слід додати їх відповідні елементи. **Наприклад**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

2) Множення матриці на число. Щоб помножити матрицю на число, потрібно всі її елементи помножити на це число. **Наприклад:**

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}.$$

3) Множення двох матриць. Якщо число стовпчиків матриці А дорівнює числу стрічок матриці В, то матрицю А можна множити на матрицю В. Якщо матриця А розміру $m \times n$, а матриця В – розміру $n \times p$, то матриця $C = AB$ розміру $m \times p$, причому елементи матриці c – $c_{ij}, i = i,\overline{m}, j = 1,\overline{p}$ – обчислюються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj};$$

де $a_{ik}, b_{kj} \left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}, k = \overline{1,n}\right)$ – відповідно елементи матриці А і матриці В.

Наприклад, маємо:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}; & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}; & a_{11}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}; & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

4) Множення матриці на число. Щоб помножити матрицю на число, потрібно всі її елементи помножити на це число. **Наприклад:**

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}.$$

5) Множення двох матриць. Якщо число стовпчиків матриці А дорівнює числу стрічок матриці В, то матрицю А можна множити на матрицю В. Якщо матриця А розміру $m \times n$, а матриця В – розміру $n \times p$, то матриця $C = AB$ розміру $m \times p$, причому елементи матриці c – $c_{ij}, i = i,\overline{m}, j = 1,\overline{p}$ – обчислюються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj};$$

де $a_{ik}, b_{kj} \left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}, k = \overline{1,n}\right)$ – відповідно елементи матриці А і матриці В.

Наприклад, маємо:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}; & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}; & a_{11}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}; & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Семінарське заняття 3

Тема . Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

<u>*Питання для усного опитування та дискусії*</u>

1. Формули Крамера.
2. Метод Гаусса.
3. Матричний метод розв’язування систем рівнянь.
4. Ранг матриці.

<u>*Аудиторна письмова робота*</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : формули Крамера, прямий хід метода Гаусса, зворотний хід метода Гауса, матричний метод, ранг матриці, метод обвідних мінорів, зведення матриці до трапецієвидної форми, теорема Крон екера – Капеллі, сумісність (несумісність) системи рівнянь.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Метод Крамера.

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

<u>**Розв’язком**</u> системи (1) називається будь-яка трійка чисел $(x; y; z)$, яка задовольняє систему.

Введемо до розгляду визначник системи D , а також визначники Dx, Dy, D_z за формулами:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dx = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dy = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $D \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок, що визначається <u>формулами Крамера</u>:

$$x = \frac{Dx}{D}, y = \frac{Dy}{D}, z = \frac{Dz}{D}$$

(Якщо $D = 0$, то система (1) або несумісна, або має безліч розв’язків)

Метод Гаусса.

Існують і інші методи розв’язування систем рівнянь. Покажемо, як розв’язують систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими методом Гаусса. (К. Гаусс, 1777 – 1855 – великий німецький математик); *n>2.*

Проілюструємо метод Гаусса на прикладі, який ми розв’язали методом Крамера. (тут $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$). Перше рівняння системи є зведеним. Проілюструємо прямий хід метода Гаусса за допомогою перетворення таблиці коефіцієнтів вихідної системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Здійснюючи обернений хід, одержуємо: $z = 0$;

$y + 0 = 2$ (отже, $y = 2$);

$x + 2 + 0 = 3$ (отже, $x = 1$).

Обидві відповіді співпали.

Розв’язування систем матричним методом.

За допомогою матриць система трьох лінійних неоднорідних рівнянь з трьома невідомими запишеться так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$AX = B$$

(тут А – матриця виду $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, X – вектор виду $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, B – вектор виду $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$). Припустимо, що $\det A \neq 0$.

Домножимо обидві частини рівняння (1) зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки, $A^{-1}A = E, EX = X$, одержуємо:

$$X = A^{-1}B$$

Зауважимо, що метод оберненої матриці (матричний метод) особливо зручний, коли потрібно розв’язати декілька систем рівнянь з однаковими лівими частинами та різними стовпчиками вільних членів – такі системи мають однакову обернену матрицю.

Ранг матриці та способи його обчислення.

Нехай ми маємо прямокутну матрицю А розміром $m \times n$.

Рангом матриці А $\left(rangA = r_A = r\right)$ називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Так, <u>наприклад</u>, ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює нулю, а матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює двом.

Якщо в матриці А є відмінний від нуля мінор порядку k, а всі мінори $k+1$-го порядку або дорівнюють нулю, або не існують, то $r_A = k$.

Семінарське заняття 4

Тема . Функціональна залежність. Границя функції і послідовності

<u>Питання для усного опитування та дискусії</u>

1. Функція однієї та багатьох змінних.
2. Послідовність, її границя.
3. Границя функції однієї і багатьох змінних.
4. Основні теореми про границі.
5. Приклади відшукання границь.

<u>Аудиторна письмова робота</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: функція однієї змінної, функція багатьох змінних, послідовність, границя послідовності, границя функції однієї змінної, границя функції багатьох змінних, перша «чудова» границя, друга «чудова» границя, теореми про границі.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Функція однієї змінної

Якщо кожному значенню змінної x, що належить деякій області, відповідає одне певне значення другої змінної *y*, то *y* є <u>функція від x</u>: $y = f(x)$.

Сукупність значень *x*, для яких визначаються значення функції *y* в силу правила $f(x)$, називається <u>областю визначення функції</u>.

До <u>основних елементарних функцій</u> відносяться:

1) степенева функція $y = x^\alpha$ (α - дійсне число);
2) показникова функція $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);
3) логарифмічна функція $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);
4) тригонометричні функції $- y = \sin x, y = \cos x, y = tgx$;
5) обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$.

<u>**Елементарною функцією**</u> називається функція, яка може бути заданою однією формулою виду $y = f(x)$, де вираз справа складений із основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченого числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і взяття функції від функції.

<u>Алгебраїчною функцією</u> називається будь-яка функція $y = f(x)$, яка задовольняє рівняння виду

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0,$$

де $P_0, P_1, \ldots, P_n$ – многочлени від x.

До алгебраїчних функцій належать такі елементарні функції:

а)<u>ціла раціональна функція</u> (многочлен)

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

(тут $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коефіцієнти, n – ціле невід’ємне число – степінь многочлена);

б) <u>дробово-раціональна функція</u>

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

(тут a_i, b_j – коефіцієнти, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, n та m – цілі невід’ємні числа – степені многочленів у чисельнику і знаменнику);

в) **<u>Ірраціональна функція</u>**: якщо в формулі $y = f(x)$ у правій частинні виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональними нецілими показниками, то функція $y = f(x)$ називається ірраціональною (наприклад, $y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}$).

Функція, яка не є алгебраїчною, називається **<u>трансцендентною</u>** (наприклад, $y = e^{-x}$).

Функція двох змінних

Якщо кожній парі (x, y) значень двох, незалежних одна від другої, змінних величин x і y з деякої області їх зміни D відповідає певне значення величини *z*, то говорять, що *z* є <u>функцією двох незалежних змінних</u> x і y, визначено в області D. *(z= z (x,y); (z=f(x,y); z=F(x,y)* і т.п.)

Сукупність пар (x, y) значень x і y, при якій визначена функція $z = z(x, y)$, називається <u>областю визначення</u> цієї функції.

Областю визначення функції може бути вся площина або деяка її частина. Лінія, яка обмежує дану область, називається її <u>границею</u>. Точки області, які не лежать на границі, називаються внутрішніми точками області. Область, що складається із самих тільки внутрішніх точок, називається **<u>відкритою</u>** (незамкненою). Якщо до області відносяться і точки границі) то область **<u>замкнена</u>**.

Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Перед тим, як перейти до вивчення питання про границю послідовності і границю функції, пригадаємо з лекції що таке нескінченно мала і нескінченно велика величини.

Зазначимо, що з усієї множини змінних величин можна виділити такі, у яких процес зміни відбувається особливим чином.

<u>Означення</u>. Змінна величина x називається <u>нескінченно малою</u>, якщо у процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається менше будь-якого, як завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε, тобто $|x| < \varepsilon$. Зокрема, єдиного нескінченно малою величиною серед сталих величин є величина O.

Нескінченно малі величини, позначають, як правило, буквами грецького алфавіту α, β, γ.

<u>Означення</u>. Змінна величина x називається <u>нескінченно великою</u>, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина x стає і залишається більше будь-якого, як завгодно великого, наперед заданого додатного числа N, тобто $|x| > N$.

Наприклад, величина 3^n при необмеженому зростанні n є нескінченно великою величиною.

Постійна величина a називається <u>границею</u> змінної величини x, якщо $|x-a|$ – нескінченно мала величина (тобто $|x-a| < \varepsilon$). Якщо a є границею змінної величини x, то говорять, що x прямує до границі a і позначають:

$$\lim x = a, \text{ або } x \to a.$$

Звідси випливає, що $\lim \alpha = 0$, де α – нескінченно мала величина. Нескінченно велика величина x скінченої границі не має $(\lim x = \pm\infty)$.

Знаходження границі відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин називають <u>розкриттям невизначеності</u> їх відношення.

Границя послідовності

<u>Означення</u>. Число c називається <u>границею послідовності $\{u_n\}$</u>(це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі члени u_n послідовності з номерами $n > N$ задовольняють умову: $|u_n - c| < \varepsilon$.

У деяких випадках говорять, що $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. Це означає, що $|u_n|$ необмежено зростає при $n \to \infty$.

<u>Означення.</u> Скінченну границю послідовності $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ називають <u>числом е</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число е – ірраціональне; що приблизно дорівнює 2,7182818....

Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай залежна змінна x необмежено наближається до числа x_0 (це означає, що x приймає значення, як завгодно близькі до x_0, але відмінні від x_0): $x \to x_0$.

Число A називається <u>границею функції</u> $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, що досить мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Інакше кажучи, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \neq x_0$, які належать δ-околу точки x

$$|x - x_0| < \delta,$$

буде виконуватися нерівність

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$$

то число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$. (Це – означення границі, запропоноване Коші).

Семінарське заняття 5

Тема. Неперервність функції. Точки розриву

Питання для усного опитування та дискусії

1. Неперервність функції однієї змінної.
2. Точки розриву, їх класифікація.
3. Теореми про неперервні функції.
4. Неперервність функції двох змінних.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : неперервність функції однієї змінної у точці (на інтервалі), неперервність функції двох змінних у точці (в області), точка розриву першого роду, точка розриву другого роду, точка ліквідного розриву, точка нескінченного розриву, теореми Вейєрштрасса, теореми Больцано - Коші.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Функція *y=f(x)* називається неперервною в точці x_0, якщо ця функція визначена в якому-небудь околі цієї точки (включаючи дану точку) і якщо нескінченно мальму приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція називається неперервною в інтервалі, якщо вона неперервна у всіх точках інтервалу. Геометрично неперервність функції у замкненому інтервалі означає, що графіком функції є суцільна лінія.

Якщо для функції *y=f(x)* умова неперервності в точці x_0 порушена, то ця точка називається точкою розриву функції. Точка розриву функції називається точкою розриву першого роду, якщо у цій точці функція має ліву і праву скінченні границі. Якщо, зокрема, ці границі рівні між собою, але функція *f(x)* при $x=x_0$ не визначена (або визначена, проте не рівна цим границям), то x_0 називають точкою ліквідовного розриву. Всі точки розриву, які не є точками розриву першого роду, називаються точками розриву другого роду (це, зокрема, точки нескінченного розриву).

Мають місце так звані **перша і друга "чудові" границі:**

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ (перша "чудова" границя);

$\lim\limits_{\alpha\to\infty}(1+\dfrac{1}{\alpha})^{\alpha}\varepsilon$ (друга "чудова" границя);

Так наприклад, за допомогою першої "чудої" границі знаходимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}k\frac{\sin kx}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=1.$$

За допомогою другої “чудової” границі знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}\cdot k} = \varepsilon^k.$$

Семінарське заняття 6

Тема Похідна. Диференціал

<u>*Питання для усного опитування та дискусії*</u>

1. Похідна функції однієї змінної, її геометричний, фізичний, економічний зміст.
2. Таблиця похідних.
3. Частинні похідні та їх економічні застосування.
4. Диференціал функції однієї та двох змінних.
5. Похідні і диференціали вищих порядків.

<u>*Аудиторна письмова робота*</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : похідна, частинна похідна, геометричний зміст звичайної похідної, фізичний зміст звичайної похідної, економічний зміст звичайної і частинної похідної, таблиця похідних, диференціал функції однієї змінної, диференціал функції двох змінних, похідні і диференціали вищих порядків, формула Тейлора (випадок функції однієї і двох змінних).

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Похідна, її фізичний, геометричний та економічний зміст.

Нехай ми маємо функцію $y = f(x)$, визначену в деякому проміжку. Знайдемо приріст функції в точці x:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ та знайдемо $\lim_{\Delta x\to x}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (якщо ця границя існує).

<u>Похідною</u> функції $y = f(x)$ по аргументу x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну позначають так: $f'(x)$; y_x.; $\frac{dy}{dx}$

Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ називається <u>**диференціюванням**</u> цієї функції.

Дамо **економічну інтерпретацію** похідної.

Нехай витрати виробництва k є функцією обсягу продукції x.

Границю $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta k}{\Delta x} = k'(x)$ називають <u>граничними витратами виробництва</u>. Нехай, наприклад, функція витрат $k(x)$ має вигляд:

$$k(x) = 400x - 0{,}01x^2$$

Знайдемо $k'(x)$:

$$k'(x) = 400 - 0{,}02x.$$

Оскільки реальний економічний зміст x мають лише цілі x, то можна написати наближену рівність:

$$k(x+1)-k(x)=k'(x), \ \Delta x=1.$$

Таким чином, функція $k'(x)$ показує, наскільки зміняться витрати при збільшенні виробництва на одиницю. Наприклад, $k'(50)=400-0.02\cdot 50=399$. Це означає, що при збільшенні обсягу виробництва з 50 до 51 одиниці витрати виробництва зростуть на 399 одиниць.

Диференційовність та неперервність функцій

Якщо функція $y=f(x)$ має похідну в точці x_0, тобто якщо існує

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то функцію $f(x)$ при даному значенні $x=x_0$ називають **диференційованою**.

Похідні від елементарних функцій. Правила диференціювання (теореми про сталий множник, про похідну суми, добутку і частки)

Користуючись означенням похідної, можна знайти похідні від таких елементарних функцій.

1) $y=C$ (C – стале число). Покажемо, що $C'=0$: $\Delta y=C-C=0$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$. (Студентам рекомендується дати геометричне тлумачення цього факту).
2) $y=\sin x$. Покажемо, що $y'=\cos x$. Маємо: $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

Знаходимо $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\Delta x)}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

(ми скористалися першою “чудовою” границею).

При знаходженні похідних елементарних функцій користуються теоремами про сталий множник, про похідну суми, добутку і частки.

Диференціювання складної, наявної, оберненої функції

а) Має місце така теорема про <u>диференціювання складної функції</u>.

<u>**Теорема**</u>. Якщо функція $u=\varphi(x)$ має в деякій точці похідну $u'_x=\varphi'(x)$, а функція $y=F(u)$ має при відповідному значенні u похідну $F'(u)=y'_u$, тоді складна функція $y=F(\varphi(x))$ у вказаній точці x теж має похідну, яка дорівнює $y'_x=y'_u u'_x$.

<u>**Приклад**</u>. Знайти похідну функції $y=\ln\sin x$. Тут $y=\ln u$, де $u=\sin x$. Маємо:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=ctgx$$

Аналогічно, якщо $y=F(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x)$, то $y'_x=y'_u u'_v v'_x$.

<u>Приклад</u>. Знайти похідну функції $y=\sin^2 x^{\frac{1}{3}}$. Тут $y=u^2$, де $u=\sin v$, причому $v=x^{\frac{1}{3}}$. Маємо: $y_x = 2\sin x^{\frac{1}{3}}\cos x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sin 2\sqrt[3]{x}$.

Таблиця основних формул диференціювання

Наведемо <u>таблицю основних формул диференціювання</u>.

Функція	Її похідна	Функція	Її похідна
c	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	a^x	$a^x \ln a$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}\left(=\frac{\log_a e}{x}\right)$ (зокрема, $\frac{1}{x}$ при $a=e$)

Диференціал та його геометричне значення

Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна на проміжку $[a,b]$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, де $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Отже, приріст функції Δy є сумою двох доданків: $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$ (припустимо; що $f'(x)\neq 0$). Отже, при $\Delta x\to 0$ перший доданок, тобто $f'(x)\Delta x$, є нескінченно малою величиною першого порядку відносно Δx, а $\alpha\Delta x$ – нескінченно малою вищого порядку відносно Δx.

Добуток $f'(x)\Delta x$ називається <u>диференціалом</u> функції і позначають dy або $df(x)$.

Похідні та диференціали вищих порядків

Похідна від першої похідної називається другою похідною (або <u>похідною другого порядку</u>): $(f'(x))'=y''$. <u>Похідною n-го порядку</u> від функції $f(x)$ називається перша похідна від $(n-1)$-ої похідної: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'=f^{(n)}(x)$.

Семінарське заняття 7

Тема . Основні теореми диференціального числення функції однієї змінної

Питання для усного опитування та дискусії

1. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші.
2. Правила Лопіталя.
3. Дослідження функції однієї змінної на монотонність, екстремум і на напрямок вигнутості.
4. Асимптоти графіка функції.
5. Загальна схема побудови графіка функції.
6. Застосування похідної в економіці.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші, перше правило Лопіталя, друге правило Лопіталя, вертикальна асимптота, похила асимптота, монотонне зростання, монотонне спадання, екстремум (мінімум, максимум), вгнутість, увігнутість, точка перегину.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

3Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші

Диференціальне числення застосовують для дослідження функцій. Наведемо теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші.

Теорема Ферма. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі $[x_1, x_2]$, приймає своє найбільше (або найменше) значення у внутрішній точці ξ цього інтервалу: $x_1 < \xi < x_2$. Якщо в точці ξ похідна функції $f(x)$ існує, то вона обов'язково дорівнює нулю: $f'(\xi) = 0$.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$, диференційована у всіх його внутрішніх точках та приймає на кінцях інтервалу рівні значення, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого $f'(\xi) = 0$.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$ і диференційована у всіх його внутрішніх точках, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$ та диференційовні у всіх його внутрішніх точках, причому $\varphi'(x)$ у цих точках не перетворюється в нуль, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Правило Лопіталя

Наведемо правило Лопіталля граничного переходу, яким зручно користуватися при дослідженні функцій.

Правило Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) сумісно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю скінченну чи ні, то і відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних:

$$\underset{x \to x_0}{дшь} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{/}(x)}{\varphi^{/}(x)}, \ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varepsilon(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f^{/}(x)}{\varepsilon^{/}(x)}.$$

Приклад, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x'}{\left(e^x\right)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Деколи цим правилом доводиться користуватися декілька разів.

Загальна схема дослідження функцій

Можна рекомендувати таку схему дослідження функцій

1) Знайти область визначення функції її точки розриву.
2) Вияснити питання про парність, періодичність, характерні точки функції.
3) Визначити інтервали знакосталості та монотонності функції.
4) Знайти екстремуми функції.
5) Дослідити функцію на вигнутімть і увігнутість.
6) Знайти вертикальні і похилі графіка функцій (якщо вони існують)
7) На основі одержаної інформації побудувати графік функцій.

Зауважимо, що окремі пункти цієї схеми можна переставляти місцями. Можна також проводити додаткове дослідження в залежності від функції – наприклад, шукати lim*f(x)* і т.п.

Завдання біля дошки: Провести повне дослідження та побудувати графік функцій

$$y = \frac{x^3}{2 - x^3}.$$

Об’єднаючи одержану інформацію, будуємо графік функції $y = \dfrac{x^3}{2 - x^2}$ (рис.1)

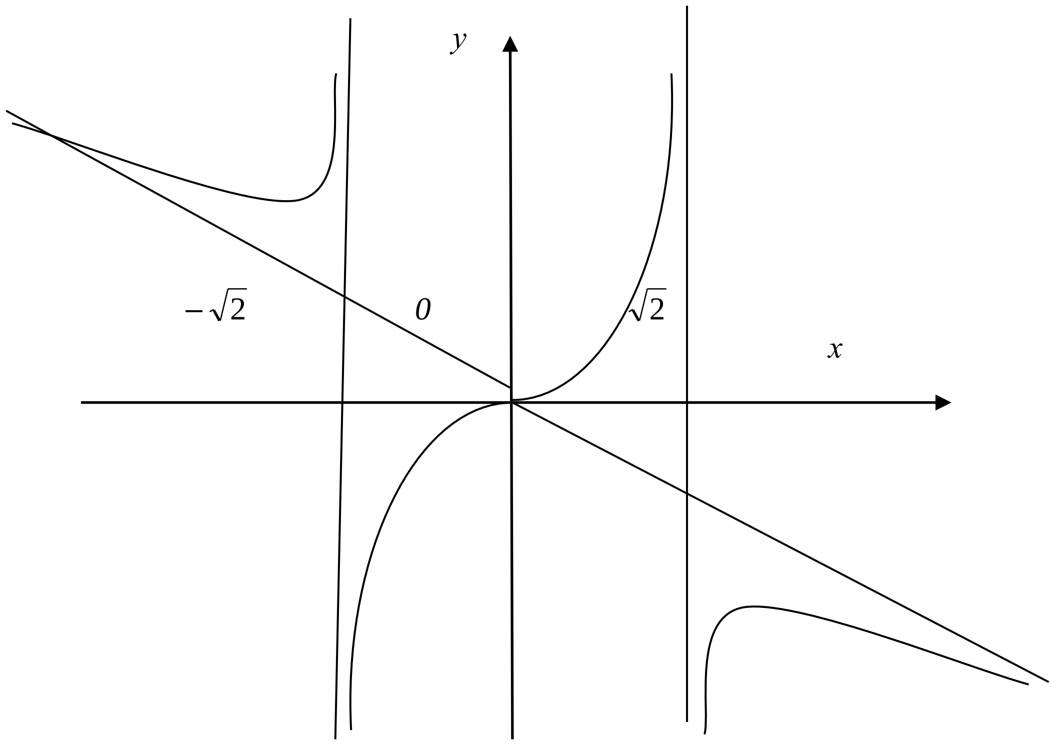


Рис.1.Графік функції $y = \dfrac{x^3}{2 - x^2}$

Застосування похідної в економіці

У практиці економічних досліджень широке застосування одержали *виробничі функції*, які використовуються для виявлення залежностей випуску продукції від витрат ресурсів, при прогнозуванні розвитку галузей, при розв'язуванні оптимізаційних задач. Наприклад, якщо виробнича функція $y = f(x)$ встановлює залежність випуску продукції y від витрат ресурсу x, то $f'(x)$ називають *граничним продуктом*; якщо ж $y = f(x)$ встановлює залежність витрат виробництва y від об'єму продукції x, то $f'(x)$ називають *граничними витратами*.

Для вивчення відносної зміни приросту функції $y = f(x)$ при малих відносних змінах приросту аргументу x використовують *коефіцієнт еластичності функції* (або *еластичність*).

Нехай задана функція $y = f(x)$, а Δx і Δy – прирости незалежної і залежної змінної, причому $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Відносний приріст залежної змінної – це вираз виду $\dfrac{\Delta y}{y}$. Відношення відносно приросту функції до відносного приросту незалежної змінної $\dfrac{\Delta y}{y} : \dfrac{\Delta x}{x}$ показує, у скільки разів відносний приріст функції більший за відносний приріст незалежної змінної. Представимо його у формі:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}.$$

Якщо функція *y=f(x)*диференційована, то

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}\right) = f'(x)\frac{x}{y}$$

.

Границя відношення відносного приросту функції $y = f(x)$ до відносного приросту незалежної змінної, коли $\Delta x \to 0$, називається *еластичністю функції $y = f(x)$ відносно змінної x*.

Еластичність функції $y = f(x)$ позначимо символом $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Еластичність функції допускає таку економічну інтерпретацію: еластичність – це наближений процентний приріст функції, що відповідає приросту незалежної змінної на 1%.

$$y = -0{,}14 + 1{,}37x.$$

Семінарське заняття 8

Тема. Невизначений інтеграл. Комплексні числа

Питання для усного опитування та дискусії

1. Задача інтегрального числення. Первісна.
2. Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця інтегралів.
3. Заміна змінних та інтегрування по частинах у невизначеному інтегралі.
4. Комплексні числа, операції над ними.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: первісна, інтеграл, таблиця інтегралів, безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінних), інтегрування по частинах, комплексне число, алгебраїчна форма комплексного числа, тригонометрична форма комплексного числа..

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Невизначений інтеграл

Первісна функція. невизначений інтеграл.

Основна задача диференціального числення – це знаходження похідної або диференціала заданої функції. Сформулюємо обернену задачу по заданій похідній або диференціалу деякої невідомої функції потрібно знайти цю функцію. Інакше кажучи, маючи $dF(x) = f(x)dx$ або $F'(x) = f(x)$, потрібно знайти невідому функцію $F(x)$. Це – основна задача інтегрального числення.

Первісною функцією для даної функції $f(x)$ на даному проміжку називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$ на розглядуваному проміжку.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

Враховуючи означення невизначеного інтеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

можна легко довести основні його властивості

1) Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна – підінтегральній функції:

$$\underline{d\int f(x)dx = f(x)dx,} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2) Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційованої функції дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданка:

$$\underline{\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + c.}$$

Зауважимо, що в підкреслених виразах знаки d і $\int$ взаємно знищують один одного. В цьому розумінні, як вже згадувалося, диференціювання та інтегрування є <u>взаємно оберненими</u> математичними операціями.

3) Відмінний від нуля сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

Дійсно: $A\int f(x)dx = A(F(x) + c) = AF(x) + c_1 \quad (c_1 = AC)$.

При цьому $AF(x)$ – первісна для Af, оскільки $(AF)' = AF' = Af$.

4) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа неперервних функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі невизначених інтегралів цих функцій.

Таблиця найпростіших інтегралів.

Безпосереднім диференціюванням перевіряється справедливість наступних табличних формул.

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$.
3. $\int e^x dx = e^x + c.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + c.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c.$
11. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$
12. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1} + c.\right|$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + c \quad (\alpha \neq 0).$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c.$

15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c.$

16. $\int \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$

17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$

Відзначимо такі корисні для інтегрування властивості диференціала

1) $dx = d(x+b), b - const$ 2) $dx = \frac{1}{a}d(ax), a \neq 0$

3) $dx = \frac{1}{2}d(ax+b), (a \neq 0)$ 4) $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$

5) $\sin xdx = -d(\cos x)$ 6) $\cos xdx = d(\sin x)$

Наведемо ще деякі приклади.

№3 $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$.

№4 $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$

№5. $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + c$.

№6 $\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1) = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c.$

№7. $\int tgxdx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c.$

Інтегрування методом заміни змінної (способом підстановки) та по частинах.

Існує два основних методи інтегрування – метод заміни змінних (спосіб підстановки) а) та метод інтегрування по частинах б).

а) Нехай потрібно знайти $\int f(x)dx,$ який не є табличним інтегралом (але відомо, що існує). Виконаємо в підінтегральному виразі заміну: $x = \varphi(t)$ (тут $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні функції, причому існує обернена функція $\varphi^{-1}(t)$).

Б) Формула інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu.$

Наприклад.

№1. $\int x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin xdx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c.$

№2. $\int \ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$

Комплексним числом називається вираз виду z=a+bi, де a та в- дійсні числа.

Тут a-дійсні, а в-уявна частина комплексного числа, а $i=\sqrt{-1}$ -уявна одиниця (зауважимо, що деколи уявною частиною називають *вi*) Загальноприйнятті такі позначення:

$$a=Re\,z,\ b=Imz$$

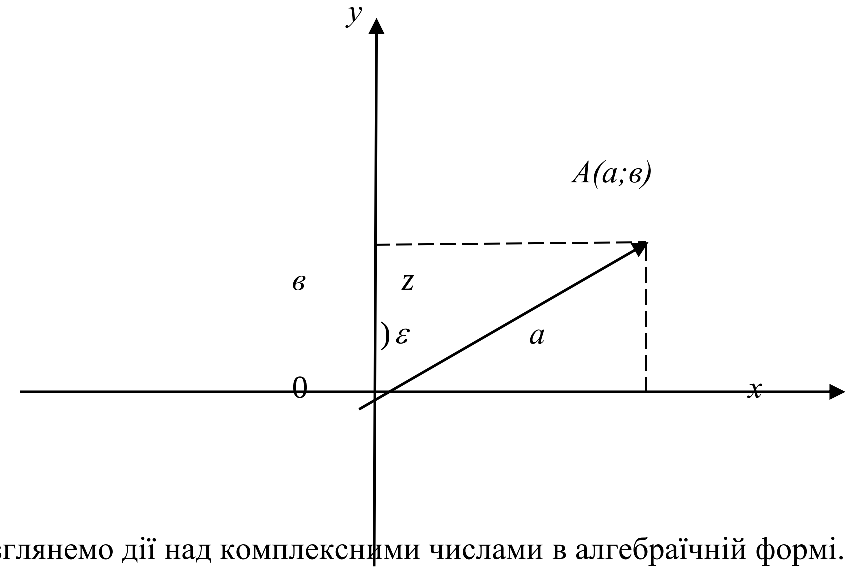
(вод re/el-дійсний, imaginaire-уявний - дійсний,)

Два комплексних числа $z_1=a_1+в_1i$ та $z_2=a_2+в_2i$ вважаються рівними ($z_1=z_2$), якщо рівні їх дійсні та уявні частини:

$$a_1=a_2,\ в_1=в_2.$$

Комплексне число дорівнює нулю, якщо а=в=0 якщо в=0. то комплексне число співпадає з дійсним: а+вi=а. Якщо а=0, то *z*=вi- одержуємо чисто уявне число. Числа $a\pm в$ називаються спряженими. Число z_1=*-а-вi*- називається протилежними до числа *z*.

Комплексні числа можна зобразити точками площини (в той час, як дійсні числа-точками числової осі ох). Комплексне число а+вi ототожнюються з парою чисел(а,в) координатами точки площини (в прямокутній декартовій системі координат хоу) оскільки кожній точці А площини відповідає радіус-вектор $\overline{OA}$, будь-яке комплексне число можна також інтерпретувати геометрично як вектор $\overline{OA}$ з координатами(а,в) (рис.1)



Розглянемо дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

Нехай задано два комплексних числа $z_1=a_1+в_1i$ та $z_2=a_2+в_2i$ (надалі така форма їх запису називається алгебраїчною). Означимо основні дії з ними-додавання, віднімання, множення і ділення.

1) Сумою z_1+z_2 комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число *z*, дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина-сумі уявних частин чисел z_1 і z_2: $z=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

   Операція додавання комплексних чисел асоціативна: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

   та комутативна: $z_1+z_2=z_2+z_1$.

2) Різницею z_1-z_2 комплексних чисел z_1 та z_2 називається комплексне число z , що є сумою числа z_1 та числа, протилежного до z_2 : $z=z_1+(-z_2)=a_1+b_1i+(-a_2-b_2i)=a_1-a_2+(b_1-b_2i$.

3) Добутком z_1, z_2 комплексних чисел z_1 та z_2 називається комплексне число

$$z=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_1+a_2b_2)i$$

Таким чином, добуток визначається за звичайними правилами алгебри:

$z = z_1 z_2 (a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_2 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

Операція множення комплексних чисел асоціативна:

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z2 \cdot z3)$

та комутативна: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

4) Часткою $\frac{z_1}{z_2}$ комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число z таке, що $z_1 = z\, z_2 \cdot (z_2 \neq 0)$.

Практично комплексні числа ділять так:

$$\frac{(a_1 + b_1 i)}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b\,b_2) + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 - (b_2 i)^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Додавання і множення комплексних чисел пов'язані законом дистрибутивності: $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Семінарське заняття 9

Тема. Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів

Питання для усного опитування та дискусії

1. Найпростіші дроби та їх інтегрування.
2. Інтегрування правильних і неправильних раціональних дробів.
3. Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів.
4. Інтегрування тригонометричних функцій.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : найпростіші (елементарні) дроби 1-го, 2-го, 3-го, 4-го типу, правильний раціональний дріб, неправильний раціональний дріб, найпростіші ірраціональності, три випадки інтегровності диференціального бінома, універсальна тригонометрична підстановка.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах

Інтегрування раціональних дробів.

Інтегрування дробів.

Для інтегрування раціональних дробів перш за все перевіряють, правильний дріб чи ні. Якщо дріб неправильний, потрібно виділити цілу частину та правильний дріб, шляхом ділення чисельника на знаменник. Ціла частина – це многочлен, який легко інтегрується. Дробову ж частину записують у вигляді суми найпростіших раціональних дробів і інтегрують.

Зупинимося детально на інтегруванні дробів 1- го, 2- го, 3- го та 4- го типів

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c;$

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c;$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} +$

$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{y^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$

Приклад №1. Знайти $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+4}dx.$

Розвязок. Оскільки дріб неправильний, поділимо чисельник на знаменник, таким чином,

$$\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+4}dx = \int\left(x^3 - 3x + \frac{12x-1}{x^2+4}\right)dx = \int x^3dx - 3\int xdx + \int \frac{12x-1}{x^2+4}dx =$$

$$\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 6\ln\left(x^2 4\right) - \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + c.$$

Приклад №2. Знайти $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)}.$

Розв'язок. Представимо правильний підінтегральний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$. Маємо:

$x = Ax + 2A + Bx^2 - 2B + Bx + Cx^2 - 2Cx + c.$ Система для визначення A, B, C:

$$\begin{cases} \tilde{N} + B = 0 \\ A + B + 2C = 1 \\ 2A - 2B + C = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, одержуємо: $A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{9}, C = -\frac{2}{9}.$

Отже, $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)} = \int \frac{\frac{1}{3}dx}{(x-1)^2} + \int \frac{\frac{2}{9}dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{2}{9}dx}{x+2} = \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{2}{9}\ln|x-1| -$

$-\frac{2}{9}\ln|x+2| + c = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\ln|x+2| + c.$

Інтегрування найпростіших ірраціональностей.

Інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається через елементарні функції – через раціональні функції, логарифми та арктангенси. Інтеграл від ірраціональної функції не завжди можна виразити через елементарні функції. Нижче будуть розглянуті випадки, коли за допомогою тієї чи іншої підстановки задача інтегрування ірраціональних чи трансцендентних функцій зводиться до інтегрування дробово-раціональних функцій і, отже, вирішується за допомогою елементарних функцій.

Приклад. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} = \begin{vmatrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{vmatrix} = 4\int \frac{t^5dt}{t^3+1} = 4\left(\int t^2dt - \int \frac{t^2dt}{t^3+1}\right) =$

$$=4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\ln\left|t^3+1\right|\right)+c=\frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}-\ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right)+c.$$

Приклад. Звести інтеграл $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$ до інтеграла від дробово-раціональної функції.

Розв’язок. Виконаємо заміну змінних $\frac{1-x}{1+x}=t^2$. Звідси

$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{-4tdt}{\left(1+t^2\right)^2}$.

Отже, $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x^2}=-4\int t\frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1-t^2\right)^2}\frac{tdt}{\left(1+t^2\right)^2}=-4\int\frac{t^2dt}{\left(1-t^2\right)^2}$.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Розглянемо інтеграл виду $\int R(\sin x,\cos x)dx.$ Цей інтеграл за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $tg\frac{x}{2}=t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції.

Дійсно, маємо:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$x=2arctgt; dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$ Таким чином, інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ раціонально виражається через t.

Приклад. $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c.$

В деяких випадках більш доцільно користуватися не універсальною тригонометричною підстановкою (якщо вона призводить до громіздких виразів під знаком інтеграла), а іншими методами.

1) Інтеграл виду $\int R(\sin x)\cos xdx$ зручно знаходити за допомогою тригонометричної підстановки $t=\sin x.$ Тоді $dt=\cos xdx,$ і ми одержуємо $\int R(t)dt.$

2) Аналогічно задача знаходження інтеграла виду $\int R(\cos x)\sin xdx$ розв’язується шляхом введення підстановки $t=\cos t.$

3) Щоб перейти від інтеграла $\int R(tgx)dx$ до інтеграла від раціональної функції, досить виконати підстановку $t = tgx$. Дійсно при цьому $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, і ми одержуємо інтеграл від раціональної функції виду

$$\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Якщо $\sin x$ та $\cos x$ містяться під знаком інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ лише в парних степенях, то доцільною є підстановка $t = tgx$. При цьому $dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Приклад. Знайдемо інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Маємо:

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right) + c.$$

Семінарське заняття 10

Тема. Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Кратні інтеграли

Питання для усного опитування та дискусії

1. Визначений інтеграл (означення, властивості, способи обчислення).
2. Невласні інтеграли першого і другого роду.
3. Подвійні та потрійні інтеграли, їх властивості, способи обчислення.
4. Застосування інтегралів.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : інтегральна сума, визначений інтеграл, геометрична інтерпретація визначеного інтеграла, заміна змінних у визначеному інтегралі, інтегрування по частинах у визначеному інтегралі, невласні інтеграли першого роду, невласні інтеграли другого роду, подвійні інтеграли, правильна область (в напрямку осі Ох, осі Оу), двохкратні інтеграли, потрійні інтеграли, трьохкратні інтеграли, обчислення площ, об’ємів, довжини дуги за допомогою інтегралів.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Визначений інтеграл. Невласні інтеграли 1-го і 2-го роду.

Якщо при будь-якому діленні відрізка $[a;b]$ такому, що $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ і при довільному виборі точок ξ_i сума $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ прямує до однієї й тієї ж самої границі I, то говорять, що функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, а границю I називають <u>визначеним інтегралом від $f(x)$ на $[a;b]$</u> і позначають $\int_a^b f(x)dx$::

$$\lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Число a називають нижньою межею інтеграла, ab – його верхньою межею. Проміжок $[a;b]$ називають відрізком інтегрування, а x – змінною інтегрування.

Властивості визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл має властивості, які можна сформулювати за допомогою знаків рівностей або нерівностей.

1) Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

Дійсно, $\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\max_i Dx_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\Delta x_i =$

$= A \lim_{\max_i Dx_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx$

2) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми кількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Це дійсно так, оскільки $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} (f_1(\xi_i) + f_2(\xi_1))\Delta x_i = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \right) =$

$= \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$

Формула Ньютона-Лейбніца.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Дійсно, якщо $F(x)$ – яка-небудь первісна від неперервної функції $f(x)$, то, оскільки $\int_a^x f(t)dt$ – також її первісна, маємо:

$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c^*$, де c^* – стала.

Для визначення цієї сталої покладемо в останній рівності $x = a$:

$\int\limits_a^a f(t)dt = F(x) + c^*$, або $O = F(a) + c^*$. Звідси одержуємо: $c^* = -F(a)$. Таким чином, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. . Підставивши $x = b$, одержуємо формулу Ньютона-Лейбніца, яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами. Цю формулу записують ще так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Для обчислення інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, де $f(x) \in C[a;b]$, можна ввести нову змінну t за формулою: $x = \varphi(t)$. Якщо:

а) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b;$

б) $\varphi(t), \varphi'(t)$ неперервні при $t \in [\alpha;\beta]$;

в) $f(\varphi(t))$ – визначена і неперервна функція на відрізку $[\alpha;\beta]$, то має місце формула:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Приклад, $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx = \begin{vmatrix} 1+x=t^2 & x=0 & t=1 \\ dx=2tdt & x=1 & t=\sqrt{2} \end{vmatrix} = \int\limits_1^{\sqrt{2}} t - 2tdt = 2\int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{2}{3}t^2\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$

При потребі користуються формулою інтегрування по частинах:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Приклад. $\int\limits_o^{e-1} \ln(x+1)dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x+1) & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln(x+1)\Big|_o^{e-1} - \int\limits_o^{e-1} \frac{xdx}{x+1} = (e-1)\ln(e-1+1) -$

$-0 - \int\limits_o^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = e-1 - \int\limits_o^{e-1} dx + \int\limits_o^{e-1} \frac{d(x+1)}{x+1} = e-1-x\Big|_0^{e-1} + \ln|x+1|\Big|_0^{e-1} = e-1-(e-1)+\ln(e-1+1)-$

$-\ln 1 = e-1-e+1+1 = 1.$

Невласні інтеграли.

I. Розглянемо інтеграли з нескінченними границями, або невласні інтеграли першого роду.

Нехай $x \in [a;\infty)$, а функція $f(x)$ неперервна. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, то вона називається невласним інтегралом від $f(x)$ на проміжку $[a;\infty)$ і позначається так: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Отже, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

Якщо $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не має скінченої границі, то говорять, що $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не існує (або розбігається).

Кратні інтеграли. Подвійні і потрійні інтеграли – це узагальнення поняття визначеного інтеграла на інтеграл по плоскій області (частині площини) та на інтеграл по об’ємній замкненій області. Обчислення подвійних інтегралів зводиться до двохкратного інтегрування, а потрійних – до трьохкратного інтегрування. При вивченні теми «Кратні інтеграли» слід звернути особливу увагу на поняття правильної двохвимірної (та правильної трьохвимірної) областей, на порядок розстановки меж інтегрування, на правила заміни змінних при інтегруванні.

Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площі.

Як зазначалося раніше, за допомогою визначеного інтеграла можна знаходити площу криволінійної трапеції, обмеженої неперервною при $x \in [a;b]$ функцією $f(x)$ (при $f(x) \geq 0$), прямими $x = a$, $x = b$ та віссю ox: $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Для знаходження площі у випадку, представленому на рис. 2, користуються формулою: $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

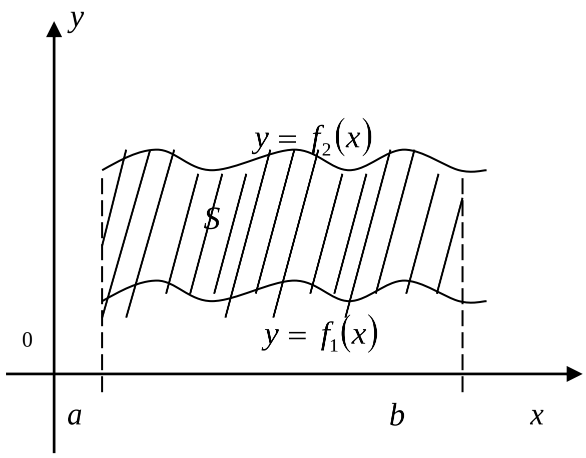


Рис. 2. Площа $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

Семінарське заняття 11

Тема. Числові ряди

Питання для усного опитування та дискусії

1. Означення ряду, його суми. Приклади.
2. Властивості числових рядів.
3. Необхідна ознака збіжності ряду.
4. Ознаки Даламбера, Коші. Інтегральна ознака збіжності ряду.
5. Знакопочергові та знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца. Абсолютна і умовна збіжність

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : ряд, частинна сума ряду, сума ряду, властивості числових рядів, необхідна ознака збіжності ряду, ознаки порівняння рядів з додатними членами, гранична ознака порівняння рядів з додатними членами, ознака Даламбера, ознака Коші, інтегральна ознака збіжності ряду, знакоперемінний ряд, знакозмінний ряд, ознака Лейбніца, абсолютна збіжність, умовна збіжність.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Числові ряди

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Вираз виду $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ (1) називається числовим рядом, а числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – членами ряду u_n – (загальний член ряду).

Властивості ряду істотно відрізняють від властивостей скінченої суми. Наприклад, для ряду

$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots$

маємо:

$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots+0+\ldots = 0;$

$1-(1-1)-(1-1)-\ldots-(1-1)-\ldots = 1-0-0-\ldots-0 = 1.$

Цей факт довго сприймався як парадокс (17-19 століття). На базі теорії границь Коші в 1821 р. дав означення суми збіжного ряду, після чого стала зрозумілою різниця між збіжними та розбіжними рядами.

Сума скінченого числа n перших членів ряду називається n – ною частинною сумою ряду:

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Таким чином, $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2$ і т. д.

Якщо при $n \to \infty$ існує границя послідовності частинних сум членів даного ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд називається збіжним, а число S – його сумою: $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$.

В противному випадку, коли $\lim_{n\to\infty} S_n$, не існує або нескінченна, ряд називається розбіжним.

Властивості збіжних рядів.

Відзначимо основні властивості рядів.

1) Якщо збігається ряд, одержаний з даного ряду відкиданням декількох його членів, то збігається і сам даний ряд. І навпаки: якщо збігається даний ряд, то збігається і ряд, одержаний з даного відкиданням декількох членів.

Дійсно, якщо S_n – сума n перших членів ряду (1), c_k – сума k відкинутих членів, δ_{n-k} – сума членів ряду, що входять в суму S_n і не входять в c_k, то $S_n = C_k + \delta_{n-k}$. Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{n-k}$, то існує і $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, і навпаки. Таким чином, на збіжність ряду не впливає відкидання скінченого числа його членів.

2) Якщо ряд (1) збігається і його сума дорівнює S, то ряд

$$cu_1+cu_2+\ldots+cu_n+\ldots,$$

де c – яке-небудь фіксоване число, також збігається і його сума дорівнює cS.

Розглянемо достатні ознаки збіжності ряду, які використовують лише вирази для його членів.

Ознака Даламбера. Нехай дано ряд $(1')$ з достатніми членами. Якщо при $n\to\infty$ існує границя відношення наступного члена до попереднього $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, що дорівнює l:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l;$$

то при $l<1$, ряд збігається, (при $l>1$ – як збіжним, так і розбіжним).

Ознака Коші. Якщо для ряду $(1')$ з додатними членами величина $\sqrt[n]{u_n}$ має скінченну границю l при $n\to\infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

то при $l<1$ ряд збігається, при $l>1$ – розбігається (при $l=1$ ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

Ряд, абсолютні величини членів якого утворюють збіжний ряд, називається абсолютно збіжним. Якщо ряд збігається, а ряд, утворений з абсолютних величин його членів, розбігається, то даний ряд називається неабсолютно або умовно збіжним.

Розглянутий вище ряд є умовно збіжним.

Виявляється, що коли ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при будь-якій перестановці його членів. При цьому сума ряду не залежить від порядку його членів. Якщо ж ряд збігається умовно, то яким би не було число А, можна так переставити члени цього ряду, щоб його сума виявилась рівною А. Більше того, можна, так переставити члени умовно збіжного ряду, що ряд, одержаний після перестановки, виявиться розбіжним.

Степеневі ряди

Теорема Абеля.

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

де $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ – сталі числа, які називається коефіцієнти ряду.

Степеневим рядом називають також функціональний ряд виду

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

де a – деяке стале число.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (1) збігається при деякому значенні x_0, не рівному нулю, то він абсолютно збігається при будь-якому значенні x, для якого $|x|<|x_0|$; якщо ряд (1) розбігається при деякому значенні x_0, то він розбігається при будь-якому x, для якого $|x|<\left|x_0'\right|$;

Інтервал і радіус збіжності.

З теореми Абеля випливає, що коли x_0 є точкою збіжності ряду (1), то в інтервалі $\left(-|x_0|,|x_0|\right)$ цей ряд абсолютно збігається. Якщо ж при $x = x_0^{/}$ ряд (1) розбігається, то він розбігається також за межами інтервалу $\left(-\left|x_0^{//}\right|;\left|x_0^{//}\right|\right)$. Отже, існує число x таке, що при $|x| < R$ ряд (1) абсолютно збігається, а при $|x| > R$ – розбігається. Таким чином, областю збіжності степеневого ряду є інтервал з центром в початку координат.

<u>Інтервалом збіжності</u> степеневого ярду називається такий інтервал $(-R;R)$, що для будь-якої точки x ,що лежить всередині цього інтервалу, ряд збігається, причому абсолютно, а для точок x, що лежать поза ним, ряд розбігається (рис. 1). Число R називається <u>радіусом збіжності</u> степеневого ряду. В деяких випадках R може дорівнювати 0 чи ∞.

Властивості степеневих рядів.

Відзначимо основні властивості степеневих рядів.

1) Сума степеневого ряду є функція, неперервна в інтервалі збіжності ряду. Відзначимо, що в тому кінці інтервалу, де степеневий ряд збігається, його сума також неперервна.
2) Степеневий ряд можна почленно інтегрувати в інтервалі збіжності.

Так, якщо

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^4 + \ldots,(-R < x < R)$$

то

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0dx + \int_0^x a_1xdx + \int_0^x a_2x^2dx + \ldots + \int_0^x a_nx^ndx + \ldots = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 +$$

$$+\frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots(-R < x < R)$$

3) Степеневий ряд можна почленно інтегрувати в інтервалі збіжності.

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots(-R < x < R)$$

Продовжуючи послідовно диференціювання, одержимо:

$S^{//}(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots,$

$S^{///}(x) = 3\cdot 2a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-2} + \ldots,$ і так далі. Степеневий ряд в інтервалі його збіжності можна почленно диференціювати будь-яке число раз. При цьому інтервал збіжності кожного ряду, одержаного в результаті диференціювання, є той же інтервал $(-R;R)$.

Функціональний ряд та його збіжність.

Розглянемо ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \qquad (1)$$

членами якого є функції; задані на інтервалі $a \le x \le b$. Щоб відповісти на питання, в якому розумінні частинна сума $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ наближається до суми $S(x)$, розглянемо поняття про відхилення двох функцій.

Нехай дві функції, $f(x)$ і $\varphi(x)$, задані на одному і тому ж скінченому інтервалі $a \le x \le b$. <u>Рівномірним</u> відхиленням їх одна від другої називається величина $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x) - \varphi(x)|$ <u>середнім інтегральним відхиленням функцій</u> $f(x)$ та $\varphi(x)$ називається величина

$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx.$ Деколи користуються <u>середнім квадратичним відхиленням:</u> $\sqrt{\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2 dx}$. Зустрічаються і інші види відхилень.

Семінарське заняття 12

Тема. Комбінаторика

<u>Питання для усного опитування та дискусії</u>

1. Скінчені множини. Комбінаторний аналіз.
2. Розміщення, перестановки, комбінації без повторень
3. Розміщення, перестановки, комбінації з повтореннями
4. Правило суми і добутку.

<u>Аудиторна письмова робота</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : комбінація, розміщення, перестановка.

Основи комбінаторики - перестановки, розміщення, комбінації.

Комбінаторика є важливим розділом математики, що досліджує закономірності розташування, впорядкування, вибору і розподілу елементів з фіксованої множини. При великому числі можливих наслідків випробування способи прямого перебору можливих варіантів малоефективні. На допомогу приходять комбінаторні методи, в основі яких лежать два настутних правила.

ПРАВИЛО ДОДАВАННЯ

Якщо дві взаємовиключні події можуть бути виконані відповідно k та m способами, тоді якусь одну з цих подій можна виконати $k+m$ способами.

Приклад 1. З міста *A* в місто *B* можна добратися 12 потягами, 3 літаками, 23 автобусами. Скількома способами можна добратися з міста A у місто B?

Розв'язання. Проїзд з A у B на потягу, літаку або автобусом є подіями, які не можуть виконуватися одночасно однією людиною (взаємовиключними), тому загальну кількість маршрутів можна обчислити сумуванням способів пересування.

$N=12+3+23=38.$

В цьому і полягає правило додавання.

ПРАВИЛО МНОЖЕННЯ

Нехай дві виконувані одна за одною дії можуть бути здійснені відповідно k та m способами. Тоді обидві вони можуть бути виконані $k*m$ способами.

Приклад 2. У турнірі беруть участь 8 команд з хокею. Скільки існує способів розподілити перше, друге та третє місця?

Розв'язання. Відповідно до умови аналіз призових місць має бути наступним: перше місце займе одна з 8 команд, друге – одна з 7, третє – одна з 6, оскільки кожна з них не може претендувати одночасно на два призових місця. Тому таких способів буде $N=8*7*6=336$

Обидва правила узагальнюються на випадок будь-якої скінченної кількості дій.
У комбінаториці розрізняють три види різних з'єднань (комбінацій) елементів фіксованої множини:

перестановки, розміщення, комбінації. На лекції було дано їх означення з позначеннями, які найбільшвживані.

Перестановками з *m* елементів називаються такі їх сукупності, що відрізняються одна від іншої тільки порядком входження елементів. Їх позначають *P(m)* та визначають за формулою $P(m)=m!$

$m!$ - факторіал числа *m*, визначається за правилом $m!=m\cdot(m-1)!;0!=1.$

Приклад 3.Скількома способами можна в садочку поставити групу з 15 дітей в ряд?
Розв'язання. На перше місце є можливість поставити когось із 15 дітей, на друге одного з 14 і т.д. Загальна кількість рівна 15 факторіал $N=15\cdot14\cdot\ldots\cdot1=15!.$

Розміщеннями з *n* елементів по *m* називаються такі сукупності *m* елементів, що відрізняються одна від іншої принаймні одним елементом або порядком їх входження ($m\le n$): $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$

Приклад 4. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти за допомогою цифр від 1 до 9?
Розв'язання Загальна кількість чисел обчислюється за формулою розміщень $A_9^3=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{9!}{6!}=9\cdot8\cdot7=504.$

Комбінацією з *n* елементів по *m* називаються такі сукупності *m* елементів, що відрізняються одна від іншої принаймні одним елементом ($m\le n$) : $C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$

З формули сполучень бачимо, що вони приймають ще менше значення ніж розміщення. З наступного завдання ми зрозуміємо де використовують розміщення.

Приклад 5. Скількома способами можна вибрати три цифри з дев'яти 1, 2, 3,...,9?
Розв'язання. Кількість усіх можливих способів визначаємо з формули $C_9^3=\frac{9!}{(9-3)!\,3!}=\frac{9!}{6!\,3!}=84.$

Завдання для самостійного розв'язування.

1. Наведіть приклади множин з навколишнього життя, виробничої діяльності, природничих наук тощо. Для кожної з наведених множин утворіть підмножини.
2. Наведіть приклади відомих вам множин з математики (алгебри, геометрії). Для кожної множини знайдіть кілька підмножин.
3. Складіть перелік усіх символічних позначень, які трапляються у вивченій темі.
4. Знайдіть усі підмножини таких множин: а) *M= {a, b, c};* б) S= *{d, e,f,k};* *в)Д* = {1,2,3,4}; г)Т={Δ,О,□}.
5. Знайдіть кілька підмножин множини усіх трикутників площини.
6. Нехай D - множина всіх непарних чисел. Що є характеристичною властивістю елементів цієї множини, як це можна записати? *(D= {x, x= 2k+* 1, *k є Z } .)*

7.Для яких з наведених пар множин має місце одне зі співвідношень *A* ⊂ *B*, *B* ⊂ *A, A* = *B:* а) *A= {a, b, c, d}, B= {a, c, d};* б) *A* = *Ǿ, B* = *Ǿ*; в) *A* = *Ǿ, B= {a, b, c } ; г) A = {a, b, c},B= {b, c, a}?* (а) B ⊂ *A; б)A = B;* в) *A* ⊂ *B; г)A = B.)*

8. За даною характеристичною властивістю елементів множини запишіть множину, перерахувавши її елементи: а) додатні числа, кратні 5, які розміщені в інтервалі (20; 80); б) усі цілі невід'ємні числа, менші від остачі від ділення числа 76 на 31.
9. Нехай *A* - множина, що складається з 8 учнів класу, які відвідують гурток з математики, а *B* - множина всіх учнів даного класу. Чи рівні ці множини?

10. Нехай N — множина натуральних чисел. Запишіть символічно підмножину М усіх натуральних чисел, кратних 3. *(М= {х, х=3к, к є N}*.)
11. Пряма p є серединним перпендикуляром (медіатрисою) відрізка АВ. Вкажіть характеристичну властивість множини точок прямої р.
12. Запишіть множину, елементами якої є розв'язки рівняння x^3 $-4x$ $-31x+70 = 0$. ({-5,2,7}.)
13. Задані множини *A = {{a, b}, {c, d}, c, d}* та *B = {{a, b}, c)*. Чи пов'язані ці множини між собою? (Так, $B \subseteq A$ *.)*
14. Нехай A= {{1, 2, 3}, {1, 3}, 1, 2}. Чи справедливо, що: а) {1, 2} $\subseteq$ *А;* б) {1, *2}є А;* в) {1, *3} є А;* г) {1, 3} $\subseteq$ А? (а) Так; б) ні, тому що серед елементів множини А немає елемента {1, 2}; в) так; г) так.)

Семінарське заняття 13

Тема. Теорія ймовірності

Питання для усного опитування та дискусії

1. Випадкові події та дії над ними.
2. Класичне визначення ймовірності.
3. Повна ймовірність.
4. Умовна ймовірність. Теорема Байєса.
5. Формули Бернулі та Пуассона

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

1. ***Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є :*** ймовірність, повна ймовірність, класична ймовірність, умовна ймовірність, теорема Байєса, формула Бернулі , формула Пуассона.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Подію називають ***випадковою***, якщо при здійсненні визначеної сукупності умов S вона може або відбутися, або не відбутися. Надалі замість того, щоб говорити "сукупність умов S здійснена", будемо говорити коротко: "зроблено випробування". Таким чином, подія буде розглядатися як результат випробування.

Події називають ***несумісними***, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій у тому самому випробуванні.

Кілька подій утворять ***повну групу***, якщо в результаті випробування з'явиться хоча б одна з них. Іншими словами, поява хоча б однієї з подій повної групи є достовірна подія. Зокрема, якщо події, що утворюють повну групу, попарно несумісні, то в результаті випробування з'явиться одна і тільки одна із цих подій. Цей окремий випадок представляє для нас найбільший інтерес, оскільки використовується далі.

Ймовірність - одне з основних понять теорії ймовірностей. Існує кілька визначень цього поняття. Приведемо визначення, що називають класичним. Далі вкажемо слабкі сторони цього визначення і приведемо інші визначення, що дозволяють перебороти недоліки класичного визначення.

Розглянемо приклад. Нехай в урні міститься 6 однакових, ретельно перемішаних куль, причому 2 з них - червоні, 3 - сині і 1 - біла. Очевидно, можливість вийняти навмання з урни кольорову (тобто червону чи синю) кулю більша, ніж можливість витягти білу кулю. Чи можна охарактеризувати цю можливість числом? Виявляється, можна. Це число і називають ймовірністю події (появи кольорової кулі).

Таким чином, ***ймовірність*** є число, що характеризує ступінь можливості появи події. Ймовірністю події А називають відношення числа сприятливих цій події результатів до загального числа всіх рівноможливих несумісних елементарних результатів, що утворюють повну групу. Отже, ймовірність події А визначається формулою $P(A) = m/n$,

де m - число елементарних результатів, що сприяють події А; n - число всіх можливих елементарних результатів випробування.

Тут передбачається, що елементарні результати несумісні, рівноможливі й утворюють повну групу.

Формула повної ймовірності

Нехай подія *A* може настати за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну групу. Нехай відомі ймовірності цих подій і умовні ймовірності $P_{B1}(A)$, $P_{B2}(A), \ldots, P_{Bn}(A)$ події А. Як знайти ймовірність події А? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема*. Ймовірність події А, яка може настати лише за умови появи одної із несумісних подій B_1, $B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події А:*

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Цю формулу називають „формулою повною ймовірності".

Ймовірність гіпотез. Формули Байєса

Нехай подія *A* може настати за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots B_n$, що створюють повну групу. Оскільки заздалегідь невідомо, яка з цих подій настане, їх називають *гіпотезами.* Ймовірність появи події *A* визначається за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Припустимо, що проведено випробування, внаслідок якого з'явилася подія *A*. Поставимо своєю задачею визначити, як змінилися (у зв'язку з тим, що подія *A* вже настала) ймовірності гіпотез. Іншими словами, будемо шукати умовні вірогідності

$$P_A(B_1), P_A(B_2), \ldots, P_A(B_n).$$

Знайдемо спочатку умовну ймовірність $P_A(B_1)$. За теоремою множення маємо

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Звідси

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Замінивши тут *P(A)* за формулою (*), отримаємо

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Аналогічно виводяться формули, що визначають умовні ймовірності інших гіпотез, тобто умовна ймовірність будь-якої гіпотези B_i (i=1, 2, ..., n) може бути обчислена за формулою

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Формула Бернуллі

Якщо проводиться декілька випробувань, причому ймовірність події А в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називають ***незалежними*** щодо події А.

В різних незалежних випробуваннях подія А може мати або різні, або одну і ту ж ймовірність. Будемо далі розглядати лише такі незалежні випробування, в яких подія А має одну і ту ж ймовірність.

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Отриману формулу називають ***формулою Бернуллі***.

Локальна теорема Лапласа. Якщо ймовірність p появи події А в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія А з’явиться в n випробуваннях рівно k разів, приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше n) значенню функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

при $x = (k - np)/\sqrt{npq}$.

Інтегральна теорема Лапласа

Знову припустимо, що проводиться n випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події А постійна і рівна p (0<p<1). Як обчислити ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія А з’явиться в n випробуваннях не менш k_1 і не більше k_2 разів (скорочено будемо говорити „від k_1 до k_2 разів”)? На це питання відповідає інтегральна теорема Лапласа, яка приводиться нижче без доведення.

Теорема. Якщо ймовірність p настання події А в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія А з’явиться в n випробуваннях від k_1 до k_2 разів, приблизно дорівнює визначеному інтегралу

$$P(k, k) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz, \qquad (*)$$

де $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ і $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

Семінарське заняття 14

Тема. Основні поняття математичного програмування. Тема. Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП

Питання для усного опитування та дискусії

1. Задача математичного програмування.
2. Цільова функція.
3. Ресурсні обмеження.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : математичне програмування, модель, цільова функція, ресурсні обмеження, ключовий рядок, ключовий стовпчик, генеральний елемент.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних за-даних умов.

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — детерміновані задачі і стохастичні. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи па-раметрів. Уся початкова інфор¬мація повністю визначена. У стохастичних задачах використо¬вується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випад-кових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програму-вання, які в свою чергу поділяються на інші класи. Схематично класифікацію задач зображено на рисунку (поділ наведений для детермінованих задач, але він такий же і для стохастичних).

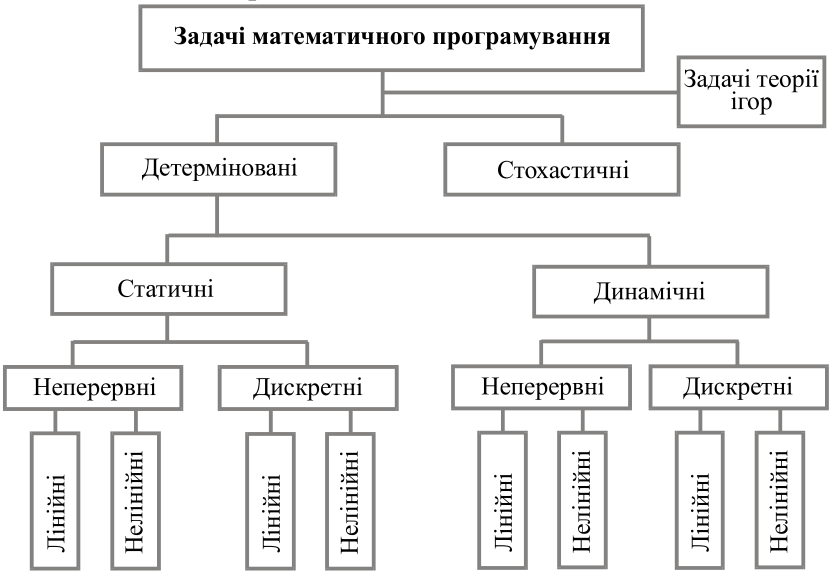


Рисунок Класифікація задач математичного програмування

Багатокомпонентність і велика розмірність систем, зокрема соціально-економічних, може значно ускладнити процес відображення мети та обмежень в аналітичному вигляді. Тому виникає необхідність у проведенні процедури зменшення реальної розмірності задачі до таких меж, які б із достатнім ступенем точності адекватно відобразили реальну дійсність. Незважаючи на велике число змінних і обмежень, які на перший погляд слід враховувати в процесі аналізу реальних ситуацій, лише невелика їх частина виявляється суттєвою для опису поведінки досліджуваних систем. Тому при виконанні процедури спрощення опису реальних систем, на основі якої буде побудована модель, насамперед необхідно ідентифікувати домінуючі змінні, параметри та обмеження. Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій від-ношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подають-ся у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Вже сама постановка питання щодо математичного моделювання будь-якого об’єкта породжує чіткий план дій, який умовно можна поділити на три етапи: модель — алгоритм — програма.

Узагальнена схема процесу
економіко-математичного моделювання

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F – вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f(x1, x2, ..., xn; \quad y1, y2, ..., ym; \quad c1, c2, ..., cl).$$

Функцію F називають цільовою функцією, або функцією мети. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача економіко-математичного моделювання формулюється так: знайти такі значення керованих змінних xj, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j}(\min) F^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ c_1, c_2, \ldots, c_l).$$

Семінарське заняття 15

Тема. Лінійне програмування.

Питання для усного опитування та дискусії

1. Лінійне програмування. Економічні приклади ЗЛП.
2. Геометричний спосіб розв’язування ЗЛП.
3. Симплекс-метод розв’язування ЗЛП.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : лінійне програмування, цільова функція, обмеження, геометричний спосіб розв’язування ЗЛП, симплекс-метод, ключовий рядок, ключовий стовпчик.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ – так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

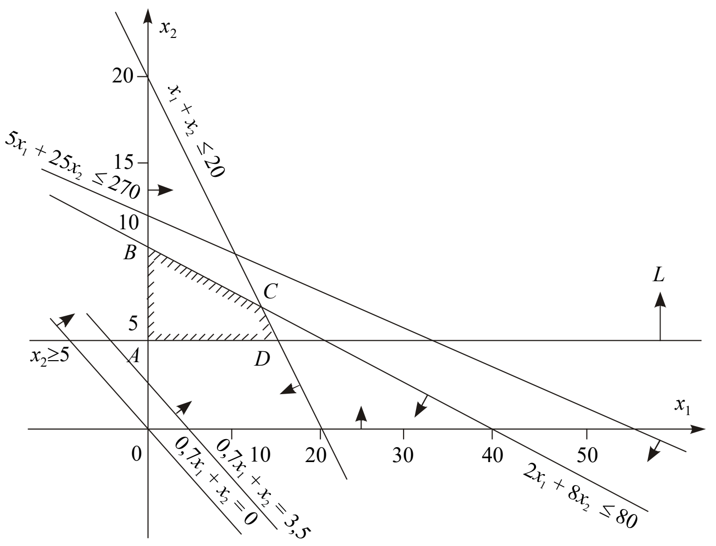
за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$$

Отже, потрібно знайти значення змінних x1, x2, …, xn, які задовольняють умови і і цільова функція набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рисунку:



Область допустимих розв’язків задачі

Область допустимих розв’язків задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \le 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \le 20$. З цією метою в нерівність $x_1+x_2 \le 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1=0$ і $x_2=0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1+x_2 \le 20$. Цей факт на рис.3.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (3.10)—(3.13). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв’язків задачі (на рис.3.2 – чотирикутник *ABCD*). Цільова функція $Z = 0{,}7x_1 + x_2$ являє собою сім’ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z. Зокрема, якщо $Z=0$, то маємо $0{,}7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $Z=3{,}5$, то маємо пряму $0{,}7x_1 + x_2 = 3{,}5$.

Семінарське заняття 16

Тема Транспортна задача. Метод потенціалів

Питання для усного опитування та дискусії

1. Постановка транспортної задачі.
2. Побудова початкового опорного плану.
3. Розрахунок потенціалів.
4. Перевірка плану на оптимальність.
5. Цикл перерахунку транспортної задачі.
6. Задачі, що розв’язуються за транспортним алгоритмом.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : транспортна задача, метод північно-західного кута, опорний план, метод потенціалів, ріняння балансу, оптимальність, цикл перерахунку, транспортний алгоритм.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Загальна постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного товару із M — пунктів відправлення ($a_1, a_2, \dots, a_m$) в N — пунктів призначення ($b_1, b_2, \dots, b_n$). При цьому в якості критерію оптимальності беруть мінімальну вартість на перевезення всього товару обо мінімальний час його доставки.

Розглянемо транспортну задачу в якості критерію оптимальності якої взято мінімальну вартість перевезення. Позначимо через C_{ij} — тарифи на перевезення одиниці товару з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Через a_i — запаси товару в i-му пункиі відправлення; b_j — потреби в товарі у j-му пункті призначення. Через X_{ij} — кількисті товару, який потрібно перевезти з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} (1)$$

при умовах:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 (4)$$

Оскільки змінні X_{ij} — задовільняють систему лінійних рівнянь і умову, то ми можемо забезпечити доставку необхідної кількості товару в кожний із пунктів призначення.

Означення 1: будь-який невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь, який записується у вигляді матриці $X = (x_{ij}), i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ — називається планом транспортної задачі.

Означення 2: план $X^* = (x_{ij}^*)(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, при якому функція приймає своє мінімальне значення називається оптимальним планом транспортної задачі.

Початкові дані транспортної задачі записуються у вигляді таблиці:

Пункти відправлення	*Пункти призначення*					*Запаси*
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	
...	...	...	...	...	...	...
A_i	C_{i1}	...	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	
...	...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	a_m
	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

1.4. Самостійна робота студентів

Самостійна робота студента є однією з основних складових оволодіння навчальним матеріалом і виконується в позааудиторний час, передбачений тематичним планом навчальної дисципліни.

Під час вивчення навчальної дисципліни студенти повинні навчитися самостійно мислити, поглиблювати засвоєні теоретичні знання, опановувати практичні навики з організації праці менеджера. Розв'язки завдань повинні бути стисло законспектовані у зошиті (у друкованому вигляді).

Для виконання завдання студент обирає варіант згідно наданими йому номером (в журналі) та параметром k.

Перша частина:

1. **Обчислити визначники двома способами:**

а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця)

$$\begin{vmatrix} 1 & k+2 & k+3 & -1 \\ -k-2 & 0 & -1 & k+4 \\ k & 1 & k+3 & -2 \\ k+2 & 7 & 1 & -k-4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -k & k+2 & -k-2 & 0 \\ 4 & 4 & k & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2+k \\ -k-1 & -k-2 & 1 & -1 \\ k & k+1 & k & 1 \\ k+1 & k+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2.Знайти добуток матриць AB **і** BA

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Розв'язати системи рівнянь:

а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k-2)x_3 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} kx_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ (k+4)x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Знайти границі функції, які відповідають Вашому варіанту.

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}$.
5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}$.
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}$.
7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$.
8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}$.
9. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}$.
10. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}$.
12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}$.

13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}$.

15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-9x-5}$.

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+1}{x^3+2x-4}$.

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-3x^2+4x-3}{4x^2-x-6}$.

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+3x-3}{-5x^2+x+2}$.

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x-1}{x^4-6x+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^3-4x+1}{2x^3+2x-4}$.

5.Знайти похідні функцій, які відповідають Вашому варіанту.

1. $y=2x^3+4\sqrt{x^7}-\operatorname{tg}x.$

2. $y=\dfrac{4}{x}-3\sqrt[3]{x^2}+3\sin x.$

3. $y=3x^2+8\sqrt[4]{x}-5\operatorname{arctg}x.$

4. $y=\dfrac{1}{4}x^4-2\sqrt{x}+\arcsin x.$

5. $y=\dfrac{5}{x^3}+6\sqrt[3]{x}-7\log_2 x.$

6. $y=\dfrac{2}{x^6}+10\sqrt[5]{x}-3e^x.$

7. $y=2x^7+8\sqrt[4]{x^3}-\cos x.$

8. $y=\dfrac{8}{x}+4\sqrt{x^3}+2\ln x.$

9. $y=\dfrac{1}{2x^4}-5\sqrt[5]{x^2}+6\sin x.$

10. $y=\dfrac{x^4}{2}+6\sqrt[3]{x^2}-3\cos x.$

11. $y=\dfrac{2}{x^3}+5\sqrt[5]{x^2}-2\arccos x.$

12. $y=\dfrac{1}{3x}-9\sqrt[3]{x^4}-5\cdot 4^x.$

13. $y=\dfrac{2}{5}x^5+8\sqrt[4]{x}-3\operatorname{arcctg}x.$

14. $y=\dfrac{1}{2}x^4+6\sqrt[6]{x^2}-4\log_3 x.$

15. $y=7x^3+3\sqrt{x^5}-3^x.$

16. $y=\operatorname{tg}\left(3x^2+x-2\right).$

17. $y=\operatorname{arctg}\left(2x^2-1\right).$

18. $y=3^{2x^3-4x+3}.$

19. $y=\sqrt[5]{\left(2x^2-4x+5\right)^2}.$

20. $y=\arccos\left(3x^2+5\right).$

6.Обчислити інтеграли:

1. $\int\left(3x^5+\cos x-\frac{2}{x^2-9}\right)dx$. **2.** $\int\left(4x^3-5e^x+1\right)dx$.

3. $\int\left(\frac{3}{4}\sqrt{x}+3^x-\sin x\right)dx$. **4.** $\int\left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}+4\operatorname{tg}x-9\right)dx$.

5. $\int\left(8x-\frac{9}{\cos^2 x}+2\right)dx$. **6.** $\int\left(2x^3-\sqrt{x}+\frac{4}{x}\right)dx$.

7. $\int\left(\sqrt[3]{x}-\operatorname{ctg}x+3\right)dx$. **8.** $\int\left(3x^2-\frac{5}{\sin^2 x}+4\right)dx$.

9. $\int\left(5x^4-3e^x+\frac{8}{x^3}\right)dx$. **10.** $\int\left(\cos x-\frac{4}{x^2+16}+x\right)dx$.

11. $\int\left(5x-3\operatorname{ctg}x+\frac{4}{x^3}\right)dx$. **12.** $\int\left(4^x-\frac{2}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$.

13. $\int\left(x^2-\frac{3}{\sin^2 x}-5\right)dx$. **14.** $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$.

15. $\int\left(2x^3-\frac{4}{\sqrt{5+x^2}}+7\right)dx$. **16.** $\int\left(4x^5+\frac{6}{\cos^2 x}-5\right)dx$.

17. $\int\left(7\sqrt[4]{x^3}-3e^x+\frac{4}{x}\right)dx$. **18.** $\int\left(3x^2-5\operatorname{tg}x+2\right)dx$.

19. $\int\left(7x^6+\frac{3}{x^2-9}+2\right)dx$. **20.** $\int\left(5x^4+4\sin x-\frac{2}{x}\right)dx$.

Друга частина
Варіант 1

1. На складі взяли 5 мішків борошна I ґатунку і 7 мішків борошна II ґатунку. Довільні 6 мішків з 12 витратили на приготування одного з видів паляниць. Знайти імовірність того, що половина з цих 6 мішків борошна виявилася борошном I ґатунку.

2. Відбувається два постріли по мішені. Чи будуть несумісними дві події: відбулося хоча б одне влучення або був хоча б один промах ?

3. Імовірність того, що один з трьох ліфтів виявиться в даний момент на першому поверсі, дорівнює 0,1. Яка імовірність того, що хоча б один ліфт виявиться на першому поверсі?

4. 30% приладів збирає спеціаліст високої кваліфікації і 70% — середньої. Надійність приладу, зібраного спеціалістом високої кваліфікації, дорівнює 0,9, приладу, зібраного спеціалістом середньої кваліфікації, — 0,8. Взятий прилад працює безвідказно. Визначити ймовірності того, що він зібраний спеціалістом високої кваліфікації.

5. Імовірність того, що витрата води на деякому підприємстві виявиться нормальним, дорівнює 0,75. Знайти імовірність того, що у найближчі 6 днів витрата води буде нормальною протягом 3 днів.

Варіант 2

1. Виготовлено 6 замків, ключі до яких змішані. Випадково беруть два ключа і два замка. Яка імовірність того, що обрані ключі підійдуть до взятих замків?

2. Здійснюється 3 постріли по мішені. Перелічити елементарні виходи, з яких складаються події, які отримуємо як суму і як добуток таких подій: відбулося рівно одне попадання; при повторному пострілі не було попадання.

3. Яка імовірність, що довільно обрані 3 людини народилися в один і той самий день тижня?

4. В ящику 12 сталевих і 8 мідних деталей. Імовірність того, що сталева деталь буде придатної при збиранні дорівнює 0,95, мідна — 0,97. Знайти імовірність того, що випадково взята з ящика деталь виявиться придатною.

5. Студенту задають 6 питань. На кожне питання дано чотири можливих відповіді, з-поміж яких необхідно вибрати одну правильну. Яка ймовірність того, що при простому вгадуванні виявиться не менш ніж на 5 питань?

Варіант 3

1. Чотири робітника прийшли на роботу до цеху, в якому працюють 12 робітників. З усіх робітників сформували випадковим чином 2 групи по 8 осіб у кожній. Знайти ймовірність того, що робітники які тільки що прийшли, будуть в одній групі.

2. Монета підкидається 3 рази. Чи є незалежними події: поява герба на перших двох підкиданнях; поява цифри хоча б в одному з останніх підкидань?

3. Знайти ймовірність того, що виріб, який складається з трьох деталей, вийшов з ладу через несправність як мінімум двох деталей, якщо імовірність виходу з ладу деталей дорівнює 0,2; 0,3; 0,1.

4. З I автомату на збирання потрапляє 40 %, з II — 30 %, з III — 20 %, з IV — 10 % деталей. Серед деталей першого автомату 0,1 % бракованих, другого — 0,2 %, третього — 0,5 %, четвертого — 0,5 %. Знайти імовірність того, що на збирання потрапила бракована деталь.

5. Завод, що виготовляє радіолампи, дає 5 % браку. На випробування взято 3 радіолампі. Знайти імовірність того, що серед них буде не більше двох зіпсованих.

Варіант 4

1. В ліфт на першому поверсі увійшли 3 чоловіки і 3 жінки. Кожний з 6 осіб з однаковою імовірністю виходить на одному з 3х верхніх поверхів. Яка імовірність того, що на кожному з цих поверхів вийде один чоловік і одна жінка.

2. Підкидаються дві гральні кості. Чи протилежні події: поява хоча б однієї парної цифри на першій кості; поява хоча б одної непарної цифри на другій кості?

3. На підприємстві 96 % виробів виробляють придатними. В кожній сотні придатних деталей виявляється 75 виробів I ґатунку, інші — другого ґатунку. Знайти імовірність того, що випадково взятий виріб підприємства буде II ґатунку.

4. Кінескоп телевізора може належати до однієї з трьох партій з імовірностями 0,25; 0,5 і 0,25. Імовірності того, що кінескоп працюватиме задану кількість годин для цих партій відповідно дорівнюють 0,2; 0,4 і 0,1. Кінескоп не пропрацював задану кількість годин. Визначити ймовірність того, що він не взятий з другої партії.

5. Опитування показало, що в деякому місті 60 % працюючого населення витрачає менше 30 хв. на проїзд до місця роботи. Знайти імовірність того, що з 5 довільно обраних працюючих не менше двох витрачають на дорогу більше 30 хв.

Варіант 5

1. На вітрині прилавку довільно виставлені 5 вазочок з цукерками різної вартості. Знайти імовірність того, що дві вазочки з найдорожчими цукерками опиняться поруч.

2. Робляться два постріли по мішені. Знайти протилежні події до суми і добутку подій: відбулося хоча б одне попадання; був хоч б один промах.

3. 10 % стандартної продукції виготовляється вищого ґатунку, 30 % — першого ґатунку. Інша стандартна продукція виготовляються другого ґатунку. Знайти імовірність виготовлення продукції другого ґатунку, якщо процент браку дорівнює 1.

4. На завод потрапляють литво в болванках з трьох ливарних заводів. З першого заводу потрапляє 20 % литва, з другого — 50 %, з третього — 30 %. Частка дефектних болванок на першому заводі становить 20 %, на другому — 10, на третьому — 15. Взята навдачу болванка виявилася дефектною. Визначити ймовірність того, що вона надійшла з другого заводу.

5. Спостереженнями встановлено, що в деякій місцевості після полудня небо безхмарне в середньому 2 дні з 3. Знайти ймовірність того, що протягом тижня хмари після полудня будуть відсутні як мінімум 5 днів.

Варіант 6

1. При перевезенні 15 000 виробів одного виду і 25 000 виробів іншого виду два вироби було пошкоджено. Знайти імовірність того, що пошкоджені вироби різних видів.

2. Підкидають 2 монети. Чи утворюють повну групу подій такі події: поява хоча б одного герба, поява хоча б однієї цифри.

3. Дві з п'яти платформ, що прибули на станцію, навантажені деталями для заводу А. Знайти ймовірність того, що ці платформи не будуть серед перших двох розвантажених платформ.

4. Деякий механізм складається з двох деталей А, п'яти деталей Б, однієї деталі В, шести деталей Г і чотирьох деталей Д. Імовірність пошкодження деталі А дорівнює 0,02, деталі Б — 0,05, деталі В — 0,10, деталі Г — 0,13 і деталі Д — 0,09. Механізм вийшов з строю. Визначити імовірність того, що несправною виявилася деталь Г.

5. Завод телефонних апаратів дає 2 % браку. На дослідження взято 4 апарати. Знайти імовірність того, що серед них буде не більше трьох зіпсованих.

Варіант 7

1. В 10 однакових коробках лежать торти різних видів: 5 тортів — одного виду, 3 — другого і 2 — третього. Випадково беруть три коробки. Знайти імовірність того, що хоча б 2 з них містять торти одного і того ж виду.

2. Підкидають дві монети. Чи є протилежними події: поява двох гербів; поява двох цифр?

3. З партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого ґатунку. Імовірність того, що випадково взятий виріб виявиться вищого ґатунку, дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що з 4 перевірених виробів хоча б один виріб буде вищого ґатунку.

4. Наладчик обслуговує 4 верстати типу А і 6 верстатів типу В. Один верстат типу А потребує наладки з імовірністю 0,3, а верстат типу В — 0,2. Знайти імовірність того, що верстат, що потребує уваги наладчика, є верстатом типу А.

5. Нормальна частота захворюваності певним захворюванням серед великої рогатої худоби складає 25 %. Для перевірки вакцини обирають 6 здорових тварин і роблять щеплення. У припущенні, що вакцина абсолютно недійова, знайти імовірність того, що захворіє не більше 2 тварин.

Варіант 8

1. У ліфт 9-поверхового будинку на першому поверсі увійшли 3 людини. Кожен з пасажирів з однаковою імовірністю може вити на будь-якому поверсі, починаючи з третього. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на різних поверхах.

2. З колоді карт виймають дві карти. Чи є протилежними події: виявлення двох червоних карт; поява двох чорних карт?

3. Брак валиків за довжиною складає 3,5 %, а брак за діаметром складає 2 % від кількості валиків, забракованих за довжиною. Брак валиків, забракованих лише за діаметром дорівнює 1,9 %. Знайти ймовірність того, що валик матиме стандартний діаметр.

4. Імовірність появи браку на першому верстаті дорівнює 0,02, на другому — 0,03, третьому — 0,01. Продуктивність першого верстата вдвічі більша, ніж другого, а продуктивність третього верстата втричі більша, ніж першого. Знайти імовірність того, що взяти випадково деталь виявиться нестандартною.

5. Експедиція видавництва відправила журнали в три поштових відділення. Імовірність своєчасної доставки журналів в кожне з поштових відділень дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що не більше ніж одне поштове відділення отримає журнали із запізненням.

Варіант 9

1. 9 деталей, виготовлених робітником за робочий день, довільним чином покладено у три ящики. Знайти ймовірність того, що в першому ящику буде три деталі, у другому — 4, а в третьому — 2.

2. Монета підкидається 2 рази. Чи є несумісними події: поява герба в 1 досліді; поява хоча б однієї цифри при обох підкидання.

3. Імовірності п’ятирічної служби кожної з чотирьох деталей механізму дорівнюють 0,5; 0,6; 0,7; 0,9. Знайти імовірність того, що механізм зіпсується через 5 років.

4. На складі є 12 контейнерів з деталями, виготовленими на заводі А, 25 контейнерів — на заводі В і 13 контейнерів — на С. Кожен день зі складу забирається один контейнер. Знайти імовірність того, що на другий день буде взято контейнер, виготовлений на заводі В, а в третій день — на заводі А.

5. Схожість насіння рослин складає 90 %. Знайти імовірність того, що з 4-х посіяних насінин проросте не більше двох насінин.

Варіант 10

1. Серед 10 деталей є одна бракована. Випадково вибрано 4 деталі. Знайти імовірність того, що серед них виявиться бракована деталь.

2. Монета підкидається 3 рази. Чи є протилежними події: поява герба при першому підкиданні; поява цифр при другому і третьому підкиданнях?

3. Наладчик обслуговує 5 верстатів. Імовірність того, що протягом години перший верстат потребуватиме його втручання, дорівнює 0,1; другий верстат — 0,25; третій — 0,15; четвертий — 0,2; п’ятий — 0,1. Визначити імовірність того, що протягом години як мінімум один верстат потребуватиме втручання наладчика.

4. На першому верстаті виготовлено 700 деталей, на другому — 550, на третьому — 750. Взята випадково деталь виявилася стандартною. Знайти імовірність того, що ця деталь виготовлена на другому верстаті, якщо процент браку на цих верстатах відповідно дорівнює: 0,5; 0,2; 0,3.

5. Імовірність затримки вильоту літаків у зимовий день дорівнює 0,9. Знайти імовірність того, що з п’яти зимових днів буде не більше одного дня, в якому відбудеться запізнення вильоту літаків.

Варіант 11

1. Виготовлено 8 деталей, з яких 2 деталі вищого ґатунку. Деталі використовуються порівно двома робітниками при збиранні механізму. Знайти імовірність того, що деталі вищого ґатунку потраплять до робітників.

2. З яких елементарних виходів складається добуток подій: поява одного герба при підкиданні двох монет; поява однієї цифри при підкиданні двох монет.

3. Виготовлено 50 деталей, з яких 20 вищого ґатунку. Знайти імовірність того, що з трьох перевіряємих деталей виявиться вищого ґатунку.

4. Існує 3 партії телефонних апаратів. Відомо, що в І і ІІІ партіях всі апарати задовольняють технічним вимогам, а у ІІ партії технічним умовам відповідають 4/5 апаратів. Знайти імовірність того, що випадково взятий апарат виявиться доброякісним.

5. На ділянці працює 6 верстатів. Імовірність зупинки верстату на якій-небудь причині дорівнює 0,01. Знайти імовірність того, що в деякий момент часу працюватимуть не менше 5 верстатів.

Варіант 12

1. З партії деталей, серед яких 5 стандартних і 3 браковані, випадково взяті 4 деталі. При перевірці виявилося, що перші 2 з 4 деталей стандартні. Знайти імовірність того, що наступна деталь, що перевіряється, буде стандартною.

2. Гральна кістка кидається два рази. Чи утворюють повну групу подій наступні події: випадання кількості балів, що становлять у сумі 2 або 12; випадіння числа балів більшого 1 на кожній кістці; випадіння числа балів менше 6 на кожній кістці?

3. При виготовленні деталі здійснюються три технологічні операції. Імовірність появи браку при кожній з них дорівнюються 0,2; 0,3; 0,1. Знайти імовірність того, що деталь буде повернена для виправлення в якій-небудь одній операції.

4. Фабрика А виробляє 50 % виробів 1-го ґатунку, 40 % — 2-го ґатунку і 10 % — 3-го. Фабрика В виробляє 70 % виробів 1-го ґатунку, 20 % — 2-го і 10 % — 3-го. Знайти ймовірність того, що вироби, що потрапили до магазину, виявляться першого ґатунку, якщо відомо, що імовірність того, що вони першого ґатунку, дорівнює 0,65.

Варіант 13

1. В групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. Випадково відібрані 9 студентів. Знайти імовірність того, що серед відібраних студентів виявиться 5 відмінників.

2. Робляться 3 постріли по мішені. Чи утворюють повну групу подій такі події: відбулося хоча б одне влучення; був хоча б один промах; було не більше двох влучень.

3. Місто постачають електроенергією три електростанції. І-ша електростанція дає 35 % всієї електроенергії, ІІ-га — 28 %, ІІІ — 37 %. Імовірності поламки електростанцій протягом року відповідно дорівнюють 0,01; 0,02; 0,03. Для сумісної роботи підприємств міста потрібно 70 % всієї електроенергії. Знайти імовірність того, що протягом року всі підприємства міста отримають необхідну кількість електроенергії.

4. Верстат обробляє 3 види деталей, причому весь його час розподіляється між ними у співвідношенні 1:3:6. При обробці деталі І виду він працює з максимальною для нього напругою протягом 60 % часу, при обробці деталі ІІ виду — 30 % і ІІІ — 50 %. У випадково обраний момент часу верстат працював з максимальним навантаженням. Знайти імовірність того, що в цей час верстат опрацьовував деталь ІІІ виду.

5. На кожні 100 виробів заводу А припадає 20 нестандартних. Фабрика отримала партію з 7 виробів заводу А. Яка імовірність того, що серед них не більше двох стандартних?

Варіант 14

1. Автобус має зробити 5 зупинок. Знайти імовірність того, що жодні 2 пасажири з 4, що їдуть у автобусі, не вийдуть на одній і тій самій зупинці.

2. Підкидаються дві гральні кості. Чи будуть сумісними наступні події: на другій кості випаде в два рази більше балів, ніж на першій; на обох костях випаде непарна кількість балів?

3. Три стрільці зробили по одному пострілу по цілі. Дві кулі влучили в ціль. Знайти імовірність того, що перший стрілець влучив у ціль, якщо імовірність влучення в ціль І-м, ІІ-м, ІІІ-м стрільцями відповідно дорівнюють 0,6; 0,4; 0,5.

4. Для участі у студентській олімпіаді з першої групи курсу виділені 4 людини, з другої — 6, з третьої — 5. Імовірність того, що студент з першої групи потрапить у збірну команду інституту, дорівнює 0,4; з другої — 0,5; з третьої — 0,8. До якої групи імовірніше всього належить І студент, що потрапив у збірну команду?

5. Перфораторщиця набила для ЕОМ 8 перфокарт. Імовірність того, що одна перфокарта набита невірно, дорівнює 0,1. Знайти імовірність того, що хоча б 7 перфокарт були набиті правильно.

Варіант 15

1. В автобусному парку є 5 машин маршруту № 10 і 8 машин маршруту № 17. З початку робочого дня машини виходять на лінію у довільному порядку. Яка імовірність того, що серед перших 4 машин вийде рівно 3 автобуса маршруту № 10.

2. Підкидаються дві монети. Розглянемо 3 події: на першій монеті випадає герб; на другій монеті випадає герб; на обох монетах з'явилося одне і те саме. Чи будуть події попарно незалежні? Чи будуть незалежними три події?

3. 20 дітей були вивезені за місто. 5 з них обгоріли на сонці, 8 були покусані комарами і 10 осіб не постраждали. Яка імовірність того, що обгорілий хлопчик не був покусаний комарами?

4. У піраміді встановлені 5 гвинтівок, з яких 3 обладнані оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець вразить мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця імовірність дорівнює 0,7. Знайти імовірність того, що мішень буде вражена, якщо стрілець виконає один постріл з випадково взятої гвинтівки.

5. У родині 5 дітей. Вважаючи однаковими імовірності народження хлопчика і дівчинки, знайти імовірність того, що у родині у два рази більше дівчаток, ніж хлопчиків.

Варіант 16

1. На стоянці автомобілів можна помістити 12 машин в один ряд. Яка імовірність того, що 3 місця, що виявилися вільними, розташовані одне за одним поруч?

2. За яких умов сума двох подій дорівнює їх добутку?

3. Імовірність безвідмовної роботи блоку, що входить у систему, протягом заданого часу дорівнює 0,8. Для підвищення надійності встановлюють такий самий резервний блок. Потрібно знайти, якою стане імовірність безвідмовної роботи системи з врахуванням резервного блоку.

4. У лікарню потрапляють в середньому 50 % хворих із захворюванням А, 30 % — із захворюванням В, 20 % — із захворюванням С. Імовірність повного одужання при захворюванні

А дорівнює 0,7; захворюванні В — 0,6; захворюванні С — 0,9. Хворий, що потрапив до лікарні, був виписаний здоровим. Знайти імовірність того, що хворий не хворів захворюванням А.

5. Імовірність прийому радіосигналу при кожному передаванні дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що при чотирикратному передаванні сигнал буде прийнято не менш як 3 рази.

Варіант 17

1. З партії деталей, серед яких 5 стандартних і 3 браковані, випадково взяті 4 деталі. При перевірці виявилося, що перші 2 з 4 деталей стандартні. Знайти імовірність того, що наступна деталь, що перевіряється, буде стандартною.

2. Гральна кістка кидається два рази. Чи утворюють повну групу подій наступні події: випадання кількості балів, що становлять у сумі 2 або 12; випадіння числа балів більшого 1 на кожній кістці; випадіння числа балів менше 6 на кожній кістці?

3. При виготовленні деталі здійснюються три технологічні операції. Імовірність появи браку при кожній з них дорівнюються 0,2; 0,3; 0,1. Знайти імовірність того, що деталь буде повернена для виправлення в якій-небудь одній операції.

4. Фабрика А виробляє 50 % виробів 1-го ґатунку, 40 % — 2-го ґатунку і 10 % — 3-го. Фабрика В виробляє 70 % виробів 1-го ґатунку, 20 % — 2-го і 10 % — 3-го. Знайти ймовірність того, що вироби, що потрапили до магазину, виявляться першого ґатунку, якщо відомо, що імовірність того, що вони першого ґатунку, дорівнює 0,65.

5. При транспортуванні кожних 100 коробок з апаратурою вміст одного з коробок потребує додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що при відкриванні трьох коробок, що надійшли на дане підприємство, виявилось, що апаратура, яка міститься у двох ящиках, не потребує регулювання.

Варіант 18

1. В ліфт на першому поверсі увійшли 3 чоловіки і 3 жінки. Кожний з 6 осіб з однаковою імовірністю виходить на одному з 3х верхніх поверхів. Яка імовірність того, що на кожному з цих поверхів вийде один чоловік і одна жінка.

2. Підкидаються дві гральні кості. Чи протилежні події: поява хоча б однієї парної цифри на першій кості; поява хоча б одної непарної цифри на другій кості?

3. На підприємстві 96 % виробів виробляють придатними. В кожній сотні придатних деталей виявляється 75 виробів I ґатунку, інші — другого ґатунку. Знайти імовірність того, що випадково взятий виріб підприємства буде II ґатунку.

4. Кінескоп телевізора може належати до однієї з трьох партій з імовірностями 0,25; 0,5 і 0,25. Імовірності того, що кінескоп працюватиме задану кількість годин для цих партій відповідно дорівнюють 0,2; 0,4 і 0,1. Кінескоп не пропрацював задану кількість годин. Визначити ймовірність того, що він не взятий з другої партії.

5. Опитування показало, що в деякому місті 60 % працюючого населення витрачає менше 30 хв. на проїзд до місця роботи. Знайти імовірність того, що з 5 довільно обраних працюючих не менше двох витрачають на дорогу більше 30 хв.

1.5. Індивідуальні завдання

З цієї навчальної дисципліни можливе (за бажанням студента) виконання наукових робіт за наступною орієнтовною тематикою:

Теми рефератів

1. Способи розв’язування систем рівнянь.
2. Розв’язування вправ з аналітичної геометрії.
3. Границя функції однієї і двох змінних.
4. Застосування диференціального числення.
5. Дії з комплексними числами.
6. Основні прийоми інтегрування.
7. Ознаки збіжності числових рядів.
8. Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку.
9. Розв’язування диференціальних рівнянь вищих порядків.
10. Елементи комбінаторики.
11. Основні теореми теорії ймовірностей.

12.Статистичні оцінки параметрів розподілу.
13.Приклади задач математичного програмування.
14.Задачі дослідження операцій.
15. Використання векторної алгебри, теорії матриць і визначників у економіці.
17. Відшукання границь послідовностей.
18.Застосування похідної в економіці.
19.Задачі лінійного програмування.
20.Задачі, що розв'язуються за транспортним алгоритмом.
21. Класична ймовірність.
22. Статистична ймовірність.
23. Геометрична ймовірність.
24. Суб'єктивна ймовірність.
25. Елементи комбінаторики без повторень.
26. Елементи комбінаторики з повтореннями.
27. Діаграми Ейлера – Венна.
28. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.
29. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.
30. Формула повної ймовірності.
31. Формула Байєса.
32. Формула Бернуллі.
33. Локальна теорема Лапласа.
34. Інтегральна теорема Лапласа.
35. Формула Пуассона.

1.6. Підсумковий контроль

Підсумковий семестровий контроль проводиться у формі усно-письмового екзамену.

Питання для підсумкового контролю

1. Поняття визначника. Обчислення визначників другого і третього порядків та їх властивості.
2. Поняття про мінори та алгебраїчні доповнення
3. Розклад визначника за елементами його стрічки (стовбця).
4. Обчислення визначників довільного порядку
5. Визначення матриці, їх види
6. Дії над матрицями
7. Обернена матриця та її знаходження
8. Економічні задачі з використанням теорії матриць
9. Системи лінійних рівнянь
10. Метод Крамера.
11. Матричний спосіб розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь
12. Метод Гаусса та Жордано-Гауса
13. Поняття функції. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції.
14. Класифікація функцій. Основні функції та їх графіки
15. Умови зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
16. Поняття екстремуму функції. Необхідні та достатні умови екстремуму.
17. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину. Необхідні і достатні умови їх існування на графіках функції.
18. Асимптоти графіка функції,їх знаходження. Повне дослідження функції та побудова її графіка.

19. Границя числової послідовності. Основні теореми про границі числових послідовностей.
20. Границя функції в точці. Поняття про односторонні границі
21. Основні теореми про границі функцій.
22. Перша і друга визначні границі
23. Визначення неперервної функції в точці. Класифікація точок розриву
24. Властивості неперервних функцій на відрізку
25. Означення похідної. Геометричний зміст похідної.
26. Фізичний та економічний зміст похідної
27. Зв’язок між неперервністю та диференційованістю функції
28. Правила диференціювання суми, добутку, частки функцій
29. Похідна від складної функції. Похідна від оберненої функції. Похідні від обернених тригонометричних функцій.
30. Таблиця похідних. Похідні вищих порядків.
31. Означення диференціала. Геометричний зміст диференціала. Основні властивості диференціала
32. Еластичність функції та її властивості. Еластичність попиту відносно ціни. Еластичність пропозиції відносно ціни.
33. Первісна функції та її властивість
34. Невизначений інтеграл та його властивості
35. Таблиця невизначених інтегралів.
36. Методи інтегрування: безпосереднє інтегрування.
37. Методи інтегрування: метод підстановки та інтегрування частинами
38. Поняття раціонального дробу. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
39. Інтегрування правильних раціональних дробів.
40. Інтегрування неправильних раціональних дробів.
41. Поняття визначеного інтегралу та його властивості.
42. Основні поняття про диференціальні рівняння.
43. Диференціальні рівняння першого порядку.
44. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння.
45. Диференціальні рівняння другого порядку
46. Числовий ряд та його збіжність.
47. Необхідна та достатня ознаки збіжності числового ряду. Ознака порівняння рядів.
48. Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП
49. Оптимізаційні економіко-математичні моделі
50. Транспортна задача. Метод потенціалів
51. Класична ймовірність.
52. Статистична ймовірність.
53. Геометрична ймовірність.
54. Суб’єктивна ймовірність.
55. Елементи комбінаторики без повторень.
56. Елементи комбінаторики з повтореннями.
57. Діаграми Ейлера – Венна.
58. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.
59. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.
60. Формула повної ймовірності.
61. Формула Байєса.
62. Формула Бернуллі.
63. Локальна теорема Лапласа.
64. Інтегральна теорема Лапласа.
65. Формула Пуассона.

1.6.2. Приклад екзаменаційного білету

1. Поняття визначника. Обчислення визначників другого і третього порядків та їх властивості

2. Формула Байєса

3. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k-2)x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Обчислити інтеграл (метод заміни змінної) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$

2.Схема нарахування балів

1. Нарахування балів студентам з навчальної дисципліни здійснюється відповідно до такої схеми:

Рис. 1. Схема нарахування балів студентам за результатами навчання

2.2. Обсяг балів, здобутих студентом під час лекцій з навчальної дисципліни, обчислюється у пропорційному співвідношенні кількості відвіданих лекцій і кількості лекцій, передбачених навчальним планом, і визначається згідно з додатками 1 і 2 до Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права імені Леоніда Юзькова.

З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення 17 лекційних занять за денною формою навчання.

Отже, студент може набрати під час лекцій таку кількість балів:

Кількість лекцій за планом	Кількість відвіданих лекцій																
17	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	9,0	9,5	10,0

2.3. З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення 68 семінарських занять за денною формою навчання.

За результатами семінарського (практичного, лабораторного) заняття кожному студенту до відповідного документа обліку успішності виставляється кількість балів від 0 до 5 числом, кратним 0,5, яку він отримав протягом заняття.

Критерії поточного оцінювання знань студентів наведені у п.4.3.8. Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права (затвердженого 29 травня 2017 року, протокол № 14).

2.4. Перерозподіл кількості балів в межах максимально можливої кількості балів за самостійну роботу студентів та виконання індивідуальних завдань, наведено в наступній таблиці:

№ з/п	10 тем	Номер теми										Усього балів
		1-2	3-4	5-7	8-9	10-11	12	13	14	15	16	
1.	Максимальна кількість балів за самостійну роботу	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	12
2.	Максимальна кількість балів за індивідуальне завдання	8										8
	Усього балів	-										20

3. Рекомендовані джерела

3.1. Основні джерела

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. – Київ: ЦУЛ, 2002. - 400с.
2. Бугір М.К. Посібник з теорії ймовірності та математичної статистики: навчальний посібник / М.К. Бугір. - Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 176 с.
3. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: навчальний посібник/ В.В. Віт- лінський, С.І. Наконечний., Т.О. Терещенко.- Київ:

КНЕУ, 2001. –248с.
4. Рудницький В.Б., Делей В.І. Вища математика: навчальний посібнк / В.Б. Рудницький, В.І. Делей. – Хмельницький, 1999. – 308с.
5. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник / П.С. Сеньо. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 446с

9.2. Допоміжні джерела

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / И.Л. Акулич. - М. : Высш. шк., 1986. - 320с.
2. Грищенко В.О., Юхименко А.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для економістів: навчальний посібник / В.О. Грищенко, А.І. Юхименко. – К.: Київський національний торгово-економічний університет, 2000. – 168с.
3. Катренко А.В. Дослідження операцій: підручник / А.В. Катренко. – Львів: «Магнолія плюс», 2005.-549 с.
4. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: навчальний посібник/ С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – К.: КНЕУ, 2003. – 452с.
5. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування: навчальний посібник / Г.Г. Цегелик.-Львів: Світ, 1995. – 216с.

4. Інформаційні ресурси

1. 1. http://profimath.simplesite.com
2. http://fmd57.ucoz.ru/
3. http://alwebra.com.ua/course/view.php?id=97&lang=uk

Розробник навчально-методичних матеріалів:

Викладачі дисципліни:
доцент кафедри математики, статистики та інформаційних технологій, кандидат економічних наук

________________________ Т.М.Фасолько

22 листопада 2019 року

Схвалено кафедрою математики, статистики та інформаційних технологій

22 листопада 2019 року, протокол № 3.

Завідувач кафедри ______________________ Р.О. Кулинич

___ _____________________ 2019 року

Декан факультету управління та економіки ______ Т. В. Терещенко

____ ______________ 2019 року

Погоджено методичною радою університету ___ _________ 2019 року, протокол № ___.

Голова методичної ради _________________ І. Б. Ковтун
____ __________________ 2019 року

Обліковий обсяг – 2,63 ум.др.арк.